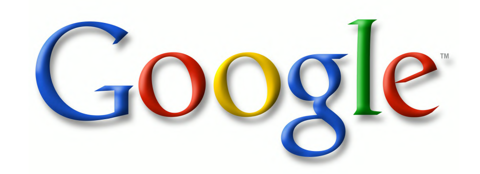


FORMULES

RELATIVES

AUX EFFETS DU TIR.

Cet opuscule manquant dans le commerce, on en a fait une réimpression à laquelle on a joint deux Notes d'un ancien professeur à l'École de Metz.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

FORMULES

RELATIVES

AUX EFFETS DU TIR

SUR

LES DIFFÉRENTES PARTIES DE L'AFFUT;

Siméon Denis

PAR S.-D. POISSON,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

DEUXIÈME ÉDITION,

Conforme à la première, imprimée par ordre de M. le Ministre de la Guerre.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, etc.

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1838

1871, Sept. 20.
Haven Fund.

FORMULES

RELATIVES

AUX EFFETS DU TIR

SUR

LES DIFFÉRENTES PARTIES DE L'AFFUT.

1. Pendant que le boulet se meut dans l'âme de la pièce, le gaz de la poudre exerce à chaque instant des pressions égales et contraires sur le fond de l'âme et sur le projectile. Les pressions sur le fond de l'âme se transmettent sur toutes les parties de l'affût, et produisent le recul. Si l'on voulait déterminer à un instant quelconque les pressions que subissent les tourillons, l'essieu, ou d'autres parties du système, il faudrait connaître la loi de la force du gaz pendant l'inflammation de la poudre, et tenir compte de la flexibilité des différentes parties de l'affût et de la matière même du canon, ce qui rendrait le problème impossible à résoudre. Mais pour éclairer la pratique sur les efforts auxquels les parties du système doivent être capables de résister, il suffit de déterminer la somme totale des pressions que chaque partie éprouve pendant toute

la durée de l'action de la poudre. Or cette somme est une quantité finie de mouvement, qui ne dépend que de celle que le boulet a reçue à la sortie de la pièce, et que l'on peut calculer en faisant abstraction de la flexibilité du système. En général, une percussion n'est autre chose qu'une pareille somme de pressions successives qui ont produit, dans un intervalle de temps très court, une quantité de mouvement indépendante de la durée de leur action. Dans la question actuelle, ce temps est celui que le boulet emploie à se mouvoir dans l'intérieur de la pièce; il s'élève à peine à un deux-centième de seconde : d'où il résulte que l'effet total de l'action de la poudre sur chaque point du système peut être assimilé à une percussion; et que le problème que nous aurons à résoudre consistera à calculer la vitesse dont un corps d'une masse donnée devrait être animé pour qu'en venant frapper soit les crosses, soit l'essieu, ou toute autre partie de l'affût, ce choc produisît sur ces parties le même effet que l'action de la poudre.

2. Nous représenterons par μ la quantité de mouvement du boulet parvenu à la bouche du canon. Cette quantité sera aussi celle qui sera communiquée en sens contraire au système de la pièce et de l'affût par l'action totale de la

poudre (*). La direction de cette force μ sera l'axe de la pièce. Nous désignerons par θ son inclinaison sur le terrain, angle qui sera positif ou négatif selon que la culasse aura été abaissée ou élevée : dans le cas le plus ordinaire, cet angle sera positif et d'un petit nombre de degrés.

Le système entier est symétrique par rapport à un plan vertical passant par l'axe de la pièce, ou parallèle à la direction du recul; nous supposerons les effets du tir semblables de part et d'autre de ce plan, en sorte que les deux roues, les deux crosses, etc., éprouveront chacune la même percussion.

Pour fixer les idées, nous supposerons aussi le terrain horizontal; nous le regarderons comme inflexible, ou du moins comme capable de résister sans flexion sensible aux pressions qu'il éprouvera dans ses points de contact, soit avec les roues, soit avec les crosses. Nous représenterons par N et R les sommes des pressions ou les percussions qui auront lieu au point de contact de chaque crosse et à celui de chaque roue. Ces forces seront verticales et dirigées dans le sens de la pesanteur; en les prenant en sens contraire, elles exprimeront les percussions verticales que l'affût éprouvera aux mêmes points. Leurs grandeurs seront des fractions de μ qu'il

(*) Note première à la fin de l'ouvrage.

s'agira de déterminer; et si l'on trouve, par exemple, $N = n\mu$, n étant une fraction donnée, cela signifiera que chaque crosse éprouve le même choc que si le boulet lancé par le canon venait la frapper avec sa vitesse initiale, diminuée dans le rapport de n à l'unité. Il en sera de même à l'égard des percussions éprouvées par les autres parties du système, dont nous aurons à déterminer les rapports avec la force μ.

Pendant toute la durée de l'action de la poudre, on devra négliger la pression exercée à chaque instant contre le terrain par le poids du système, par rapport à celle qui est due à l'action du gaz, et qui est incomparablement plus grande que la première; mais il faudra tenir compte du frottement, attendu qu'à un instant quelconque cette force est proportionnelle à la pression qui existe au même instant. Les résistances totales que le frottement des crosses et des roues contre le terrain opposera au mouvement de l'affût seront des forces horizontales agissant en sens contraire du recul, que nous pourrons exprimer par fN pour chaque crosse, et par fR pour chaque roue; f étant une fraction donnée qui dépendra de la nature du terrain et de celle des surfaces frottantes, et que nous supposons la même pour les roues et les crosses, afin de simplifier les formules que nous aurons à trouver.

3. Les quantités connues, dépendantes du poids et des dimensions des diverses parties du système, qui entreront dans ces formules, seront représentées de la manière suivante (*).

Nous désignerons par y la perpendiculaire abaissée de l'extrémité des crosses sur l'axe incliné du canon, et par c la perpendiculaire abaissée du

(*) Voyez la figure jointe à cet écrit, qui m'a été communiquée par un officier supérieur d'artillerie, avec cette note :

On a déterminé la position du centre de gravité du canon sur l'axe, en plaçant la pièce en équilibre sur l'arète saillante d'un corps résistant (par exemple sur l'arète d'un essieu placé en travers dans les encastremens), de manière que l'axe fût horizontal.

Pour obtenir la position du centre de gravité du système de la pièce et de son affût dans le plan vertical passant par l'axe, l'on a cherché d'abord celui de l'affût dans ce plan, qui le partage en deux parties à peu près symétriques, en le suspendant au moyen d'un fil de fer d'environ 4 millimètres de diamètre, en sorte que la direction de ce fil rencontrât ce plan presque à angle droit.

Ensuite, au moyen de ce centre de gravité et de celui du canon, et des poids connus de la pièce et de l'affût, il a été facile de déterminer sur la figure la position du centre de gravité du système entier.

Dans les pièces de campagne, la distance de l'axe des tourillons à celui du canon est un douzième du calibre. Afin de rendre ici cette distance plus sensible et d'apporter moins de confusion dans le dessin, l'on a descendu les tourillons, comme dans les pièces de siége.

centre de gravité du système sur la même droite;

Par l la plus courte distance de l'axe des tourillons à celui de la vis de pointage, à peu près égale à la demi-longueur de la pièce;

Par θ' l'angle peu différent de θ que le second de ces deux axes fait avec la verticale;

Par h la hauteur du centre de gravité du système au-dessus du terrain, et par a la distance de sa projection horizontale à l'extrémité des crosses;

Par h' et a' les mêmes quantités relativement au centre de gravité du canon, que nous supposerons situé sur l'axe de la pièce, direction de la force μ;

Par r et b les mêmes quantités relativement à chacune des deux roues, c'est-à-dire la longueur de son rayon et la distance de son point le plus bas à l'extrémité des crosses.

Dans la construction ordinaire des affûts, les trois lignes a, a', b, différeront peu entre elles; on aura $h' > h$, $h > r$; et l'angle θ étant peu considérable, les lignes γ et c seront à peu près égales à h' et $h' - h$; elles auront pour valeurs exactes :

$$\gamma = h' \cos\theta - a' \sin\theta,$$
$$c = (h' - h) \cos\theta - (a' - a) \sin\theta.$$

Concevons par l'axe des tourillons deux plans, l'un horizontal et l'autre vertical; nous représen-

terons par p la distance du centre de gravité du canon au premier plan, et par q sa distance au plan vertical. A cause de la prépondérance de la culasse, ce centre sera situé du même côté que cette partie de la pièce par rapport au second plan; il sera placé au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, selon que l'axe de la pièce sera au-dessus ou au-dessous de celui des tourillons. Pour comprendre ces deux cas dans les mêmes formules, nous regarderons la quantité p comme positive dans le premier cas, et comme négative dans le second. Ces distances p, et q varieront avec l'angle θ; mais si on les a mesurées quand cet angle est nul, et que l'on représente alors leurs valeurs par $p = \alpha$, $q = \beta$, on aura, pour un angle θ quelconque,

$$p = \alpha \cos\theta - \beta \sin\theta,$$
$$q = \alpha \sin\theta + \beta \cos\theta.$$

Enfin, nous appellerons M, m, m', les masses du système entier, du canon et de chacune des deux roues; et nous représenterons par MK^2, mk^2, $m'k'^2$, les moments d'inertie de ces masses, rapportés à des axes parallèles à celui des tourillons, et passant par leurs centres de gravité respectifs. Nous ferons aussi

$$\frac{m}{M} = n, \quad \frac{2m'}{M} = n';$$

de sorte que, les poids étant entre eux comme les masses, n et n' exprimeront les rapports des poids du canon et des deux roues au poids du système entier.

Il serait à désirer qu'on eût déterminé toutes ces quantités, pour les différentes espèces de bouches à feu, soit par des mesures directes, soit par le calcul ou l'expérience.

4. Voici également comme nous représenterons les inconnues de notre problème qu'il s'agira d'exprimer en fonctions des quantités précédentes.

Nous avons d'abord exprimé par N et R les percussions verticales qu'éprouvent les crosses et les roues à leurs points d'appui sur le terrain. Nous représenterons en outre :

Par T et S les percussions horizontale et verticale exercées sur l'encastrement de chaque tourillon;

Par E et F les mêmes forces relativement à la partie de chaque roue que traverse l'essieu;

Par V la percussion sur la vis de pointage, dont la direction est l'axe de cette vis, faisant l'angle θ' avec la verticale : nous conviendrons de regarder comme positives ou comme négatives les forces horizontales, selon qu'elles agiront dans le sens du recul ou en sens opposé, et les forces verticales suivant qu'elles seront dirigées en sens

contraires de la pesanteur ou dans le même sens; d'où il résultera que les composantes horizontale et verticale de la force V appliquée à la vis de pointage seront $-$ V sin θ' et $-$ V cos θ'.

Les mêmes forces T, S, V, E, F, prises en sens contraire de leurs directions respectives, agiront les trois premières sur le canon, et les deux autres à chaque extrémité de l'essieu.

Tous les points du système prendront, dans le sens horizontal, une vitesse commune; leurs quantités de mouvement correspondantes, étant proportionnelles à leurs masses, auront une résultante qui passera par le centre de gravité du système : nous désignerons par X cette force horizontale.

Le système entier pourra aussi prendre un mouvement de rotation autour de la droite qui joint les extrémités des deux crossses, ou plutôt leurs points de contact avec le terrain : nous désignerons, dans ce mouvement, par φ la vitesse angulaire dont tous les points seront animés.

Il se pourra encore qu'indépendamment de la rotation du système entier, la pièce tourne autour de l'axe des tourillons : nous représenterons par ω la vitesse angulaire de ce mouvement, produite, comme la vitesse φ et la force X, par l'action totale de la poudre.

Enfin, cette même action imprimera à chaque

parallèle à l'axe de rotation; par x et y les coordonnées horizontale et verticale de ce centre, comptées dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, à partir de leur intersection comme origine; par x' et y' les coordonnées du même centre, comptées dans les mêmes directions et dans le même plan que x et y, mais à partir d'une autre origine; les résultantes horizontale et verticale des quantités de mouvement de tous les points de m seront exprimées par $-my\omega$ et $mx\omega$; et la somme de leurs moments, pris par rapport à un axe mené par la seconde origine, parallèlement à l'axe de rotation, aura pour valeur

$$(k^2 + xx' + yy')m\omega.$$

Quand ce second axe coïncidera avec celui de rotation, cette somme deviendra $(k^2 + d^2)m\omega$; d étant la distance du centre de gravité à cette droite. Quand l'axe de rotation, ou l'axe des moments, passera par ce centre, cette même somme se réduira à $k^2m\omega$, quelque part que soit l'axe des moments dans le premier cas, ou l'axe de rotation dans le second. Les valeurs positives de y étant portées au-dessus de l'axe des x, on regarde dans ces formules la vitesse ω comme positive ou comme négative, selon qu'elle tend à élever ou à abaisser la partie de cet axe hori-

zontal sur laquelle sont comptées les valeurs positives de x.

En appliquant, par exemple, ces formules à la rotation du canon autour de l'axe mené par l'extrémité des crosses, et prenant les moments par rapport à l'axe des tourillons, il faudra faire

$$x = -a', \quad y = h', \quad x' = q,$$
$$y' = p, \quad \omega = -\varphi.$$

Les résultantes horizontale et verticale des quantités de mouvement de tous ses points seront $mh'\varphi$ et $ma'\varphi$, et la somme de leurs moments

$$-(k^2 - a'q + h'p)m\varphi.$$

De même, si l'on considère la rotation de la pièce autour de l'axe des tourillons, et qu'on prenne les moments par rapport à l'axe parallèle passant par l'extrémité des crosses, on fera

$$x = q, \quad y = p, \quad x' = -a', \quad y' = h';$$

d'où il résultera

$$-mp\omega \quad \text{et} \quad mq\omega$$

pour les résultantes horizontale et verticale des quantités de mouvement de tous ses points, et

$$(k^2 - a'q + h'p)m\omega$$

pour la somme de leurs moments.

6. Cela posé, les quantités de mouvement de tous les points du système, étant prises en sens contraire de leurs directions, doivent faire équilibre à la quantité de mouvement μ qui lui a été communiquée, et aux résistances $2N$, $-2fN$, $2R$, $-2fR$, qu'il éprouve à ses points d'appui sur le terrain. Égalant donc à zéro les sommes des composantes, soit horizontales, soit verticales, de toutes ces forces, et observant que celles de la force μ sont $\mu\cos\theta$ et $-\mu\sin\theta$, nous aurons

$$\mu\cos\theta - 2f(N+R) - X - hM\varphi + pm\omega = 0,$$
$$-\mu\sin\theta + 2(N+R) - aM\varphi - qm\omega = 0.$$

Prenant ensuite leurs moments par rapport à l'axe passant par les points de contact des crosses avec le terrain, et égalant à zéro la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner le système autour de cette droite dans le sens de la force μ, moins la somme de ceux des forces qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé, on trouve

$$\gamma\mu + 2bR - hX - (K^2 + a^2 + h^2)M\varphi$$
$$+ (k'^2 - a'q + h'p)\,m\omega + 2k'^2 m'\psi = 0.$$

Les quantités de mouvement de tous les points de la pièce dues à la vitesse horizontale commune à tous les points du système auront pour résul-

tante une force passant par le centre de gravité du canon, et qui sera à la force X comme sa masse m est à la masse M du système, c'est-à-dire égale à nX. Cette force et les quantités de mouvement des points du canon dues à ses rotations autour de l'axe passant par l'extrémité des crosses et autour de l'axe des tourillons, étant prises en sens contraire de leurs directions, feront équilibre à la quantité de mouvement μ qui a été communiquée à la pièce et aux résistances horizontale et verticale V sin θ', V cos θ' — 2T, — 2S, qu'elle éprouve en s'appuyant sur la vis de pointage et sur l'encastrement des tourillons. Pour cet équilibre, il faudra qu'on ait

$$\mu \cos\theta + \mathrm{V} \sin\theta' - 2\mathrm{T} - n\mathrm{X} - nh'\mathrm{M}\varphi + pm\omega = 0,$$
$$-\mu \sin\theta + \mathrm{V} \cos\theta' - 2\mathrm{S} - na'\mathrm{M}\varphi - qm\omega = 0,$$
$$\mu\rho - l\mathrm{V} - np\mathrm{X} - n(k^2 - a'q + h'p)\mathrm{M}\varphi + (k^2 + p^2 + q^2)m\omega = 0;$$

les moments étant pris, pour former la troisième équation, par rapport à l'axe des tourillons, ce qui fait disparaître ceux des forces T et S, dont la résultante passe par cet axe (n° 4).

En formant de même les trois équations nécessaires à l'équilibre des quantités de mouvement de tous les points de chaque roue, prises en sens contraire de leurs directions, et des résistances E, F, R, — fR, qu'elle éprouve à

ses points de contact avec l'essieu et avec le terrain, on trouve

$$E - fR - \frac{1}{2} n'X - \frac{1}{2} n'rM\varphi = 0,$$

$$F + R - \frac{1}{2} n'bM\varphi = 0,$$

$$rfR - \frac{1}{2} n'k'^2M\varphi + k'^2m'\psi = 0;$$

les moments étant rapportés, dans la troisième équation, à l'axe de l'essieu, ce qui dispense d'avoir égard à ceux des forces E et F dont la résultante passe par cette droite.

Si l'on substitue la valeur de $k'^2m'\psi$, tirée de la dernière équation de ce numéro, dans la troisième; que l'on retranche de celle-ci la première multipliée par h, et la seconde multipliée par a; et que l'on ait égard aux formules du n° 3, on aura

$$\alpha\mu + 2(b - fr)R - 2(a - fh)(N + R) - (K^2 - n'k'^2)M\varphi$$
$$+ [k^2 - (a' - a)q + (h' - h)p]m\omega = 0;$$

équation que nous emploierons à la place de la troisième, dans les calculs suivants.

Telles seront les neuf équations qui serviront à déterminer les inconnues du problème, dans tous les cas qu'il présente, et que nous allons successivement examiner.

PREMIER CAS,

Dans lequel les roues restent en contact avec le terrain.

7. Dans ce cas, on aura

$$\varphi = 0;$$

et pour qu'il ait lieu, il faudra que la valeur de R soit positive, afin que les roues s'appuient contre le terrain, et ne soient pas soulevées.

Les dernières formules du numéro précédent donnent d'abord

$$E = fR + \frac{1}{2}n'X,$$

$$F = -R,$$

$$\psi = -\frac{frR}{m'k'^2};$$

équations qui feront connaître immédiatement les valeurs de E, F, ψ, dès que celles de X et R auront été déterminées. La valeur de ψ étant négative, il en résulte que le sens de la rotation initiale des roues sera tel que leurs points de derrière seront abaissés, et ceux de devant soulevés (nº 4).

En faisant aussi $\varphi = 0$ dans les autres équations

du numéro précédent, nous aurons

$$\mu\cos\theta - 2f(N+R) - X + pm\omega = 0,$$
$$-\mu\sin\theta + 2(N+R) - qm\omega = 0,$$
$$c\mu + 2(b-fr)R - 2(a-fh)(N+R)$$
$$+[k^2 - (a'-a)q + (h'-h)p]m\omega = 0,$$
$$\mu\cos\theta + V\sin\theta' - 2T - nX + pm\omega = 0,$$
$$-\mu\sin\theta + V\cos\theta' - 2S - qm\omega = 0,$$
$$a\mu - lV - npX + (k^2 + p^2 + q^2)m\omega = 0.$$

Mais il faut maintenant observer que le cas que nous considérons se subdivise en deux autres, selon que la pièce tourne ou ne tourne pas autour des tourillons.

8. Si la pièce ne prend aucun mouvement de rotation, on aura $\omega = 0$, et il faudra que la valeur de V soit positive pour que la culasse s'appuie effectivement sur la vis de pointage. Les équations précédentes donneront alors

$$X = (\cos\theta - f\sin\theta)\mu,$$
$$R = -\frac{[c-(a-fh)\sin\theta]\mu}{2(b-fr)},$$
$$N = \frac{\{c+[b-a+f(h-r)]\sin\theta\}\mu}{2(b-fr)},$$
$$V = [a - np(\cos\theta - f\sin\theta)]\frac{\mu}{l},$$
$$T = \frac{1}{2}V\sin\theta' + \frac{1}{2}[(1-n)\cos\theta + nf\sin\theta]\mu,$$
$$S = \frac{1}{2}V\cos\theta' - \frac{1}{2}\mu\sin\theta.$$

Comme on a $b > fr$, la valeur de R sera négative, et le cas que nous examinons impossible dans le tir horizontal; mais cette valeur pourra devenir positive pour une inclinaison suffisamment grande.

Lorsque les tourillons sont au-dessous de l'axe du canon, les quantités a et p sont positives (n° 3), et par suite la valeur de V l'est aussi; quand, au contraire l'axe des tourillons sera au-dessus de celui de la pièce, cette valeur sera négative, et la pièce devra prendre un mouvement de rotation.

9. Dans ce dernier cas, on devra faire $V = 0$ dans les équations du n° 7, et la valeur de ω qu'on en déduira devra être positive pour que la culasse soit soulevée. Ces équations donneront dans cette hypothèse :

$$\omega = -\frac{\{a - np(\cos\theta - f\sin\theta)]\mu}{\{k^2 + p^2(1-n) + q(q+nfp)]m},$$

$$X = (\cos\theta - f\sin\theta)\mu + (p - fq)]m\omega,$$

$$R = -\frac{[c-(a-fh)\sin\theta]\mu + [k^2 - q(a'-fh) + p(h'-h)]m\omega}{2(b-fr)},$$

$$N = \frac{\{c + [b - a + f(h-r)]\sin\theta\}\mu}{2(b-fr)} + \frac{\{k^2 + q[b-a'+f(h-r)] + p(h'-h)\}m\omega}{2(b-fr)},$$

$$T = \frac{1}{2}[(1-n)\cos\theta + nf\sin\theta]\mu + \frac{1}{2}[(1-n)p + nfq]m\omega,$$

$$S = -\frac{1}{2}\mu\sin\theta - \frac{1}{2}qm\omega,$$

en laissant, pour abréger, la lettre ω à la place de sa valeur dans les cinq dernières formules.

Il faudra que l'inclinaison θ soit plus grande que dans le cas précédent, pour que la condition R positive soit remplie. Quant à la valeur de ω, elle sera positive, et la pièce tournera en effet, lorsque les quantités a et p seront négatives, c'est-à-dire lorsque l'axe des tourillons sera au-dessus de celui de la pièce, ce qui s'accorde avec le numéro précédent.

Toutefois, à raison de la perte de fluide qui a lieu par la lumière, la pression sur la partie inférieure de l'âme l'emporte sur celle qu'éprouve la partie supérieure. Or, cet excès de pression, ainsi que le frottement des tourillons contre leur encastrement, dont nous n'avons pas non plus tenu compte, sont des obstacles à la rotation de la pièce, qui pourront empêcher la culasse de se détacher de la vis de pointage, lorsque l'axe du canon ne sera que très peu abaissé au-dessous de celui des tourillons.

DEUXIÈME CAS,

Dans lequel les roues se détachent du terrain.

10. Il faudra alors faire $R = o$ dans les formules du nº **6**; et pour que ce cas ait lieu, il

sera nécessaire que la valeur de φ soit positive, comme ces formules le supposent.

Les trois dernières donnent d'abord

$$E = \frac{1}{2} n' (X + rM\varphi),$$

$$F = \frac{1}{2} n'bM\varphi,$$

$$\psi = \varphi,$$

ce qui fera connaître immédiatement les forces E et F et la vitesse ψ, aussitôt que les valeurs de X et φ auront été déterminées. La vitesse ψ étant positive, la rotation initiale des roues se fera de manière que les points de derrière seront élevés, c'est-à-dire en sens contraire de ce qui a lieu dans le cas où elles restent en contact avec le terrain.

En faisant $R = 0$ dans les autres équations du n° 6, elles deviennent

$$\mu \cos\theta - 2fN - X - hM\varphi + pm\omega = 0,$$

$$-\mu \sin\theta + 2N - aM\varphi - qm\omega = 0,$$

$$c\mu - 2(a - fh)N - (K^2 - n'k'^2)M\varphi$$
$$+ [k^2 - (a' - a)q + (h' - h)p]\, m\omega = 0:$$

nous n'écrivons pas celles qui contiennent V, T, S, parce qu'elles demeurent les mêmes que dans ce numéro.

Le second cas, dont il est maintenant question, se subdivise, comme le premier, en deux autres, eu égard à la rotation ou à la non-rotation de la pièce autour des tourillons.

11. Supposons en premier lieu que la pièce ne tourne pas. On fera $\omega = 0$, et il faudra que la valeur de V soit positive. Les équations précédentes donneront

$$\varphi = [c - (a - fh)\sin\theta]\,\frac{\mu}{MH^2},$$

$$X = (\cos\theta - f\sin\theta)\mu - (h + fa)\,[c - (a - fh)\sin\theta]\,\frac{\mu}{H^2},$$

$$N = \frac{1}{2}\mu\sin\theta + [c - (a - fh)\sin\theta]\,\frac{a\mu}{2H^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$K^2 - n'k'^2 + a^2 - fah = H^2.$$

Celles du n° 6 qui contiennent V, T, S, donnent ensuite

$$V = [a - np\,(\cos\theta - f\sin\theta)]\,\frac{\mu}{l}$$
$$- [k^2 - a'q + (h' - h - fa)p]\,[c - (a - fh)\sin\theta]\,\frac{n\mu}{lH^2},$$

$$T = \frac{1}{2}V\sin\theta' + \frac{1}{2}\,[(1 - n)\cos\theta + nf\sin\theta]\mu$$
$$- (h' - h - fa)\,[c - (a - fh)\sin\theta]\,\frac{n\mu}{2H^2},$$

$$S = \frac{1}{2}V\cos\theta' - \frac{1}{2}\mu\sin\theta - [c - (a - fh)\sin\theta]\,\frac{na'\mu}{2H^2}.$$

La valeur de φ et celle de R du n° 8 étant de signes contraires, il s'ensuit que la condition φ positive sera remplie, puisque, par hypothèse, la condition R positive ne l'est pas.

A cause de la seconde partie de la valeur de V, il se pourra que cette valeur soit négative, quoique celles de a et p soient positives, c'est-à-dire qu'il pourra arriver que la culasse ne reste pas en contact avec la vis de pointage, quoique les tourillons soient au-dessous de l'axe de la pièce. Quand ils seront au-dessus, la condition V positive ne sera pas satisfaite, et la pièce tournera.

12. Supposons maintenant que la pièce ait, en effet, un mouvement particulier de rotation, indépendamment de celui du système entier. On fera alors

$$V = 0,$$

et le valeur de ω devra être positive. Les équations du n° 6 qui contiennent cette force V se réduiront à

$$\mu \cos\theta - 2T - nX - nh'M\varphi + pm\omega = 0,$$

$$-\mu \sin\theta - 2S - na'M\varphi - qm\omega = 0,$$

$$a\mu - npX - n(k^2 - a'q + h'p)\,M\varphi + (k^2 + p^2 + q^2)\,m\omega = 0;$$

jointes à celles du n° 10, on en déduit

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{l} [c-(a-fh)\sin\theta][k^2+(1-n)p^2+(q+nfp)q] \\ -[\alpha-np(\cos\theta-f\sin\theta)][k^2-(a'-fh)q+(h'-h)p] \end{array} \right\} \frac{\mu}{\mathrm{DM}},$$

$$\omega = \left\{ \begin{array}{l} n[c-(a-fh)\sin\theta][k^2-a'q+(h'-h-fa)p] \\ -[\alpha-np(\cos\theta-f\sin\theta)](\mathrm{K}^2-n'k'^2+a^2-fah) \end{array} \right\} \frac{\mu}{\mathrm{D}m}.$$

$$\mathrm{X} = (\cos\theta - f\sin\theta)\mu - (h+fa)\mathrm{M}\varphi + (p-fq)\,m\omega,$$

$$\mathrm{N} = \frac{1}{2}\mu\sin\theta + \frac{1}{2}a\mathrm{M}\varphi + \frac{1}{2}qm\omega,$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}[(1-n)\cos\theta + nf\sin\theta]\mu - \frac{1}{2}(h'-h-fa)n\mathrm{M}\varphi$$

$$+\frac{1}{2}[(1-n)p+nfq]\,m\omega,$$

$$\mathrm{S} = -\frac{1}{2}\mu\sin\theta - \frac{1}{2}na'\mathrm{M}\varphi - \frac{1}{2}qm\omega,$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{array}{l} [\mathrm{K}^2-n'k'^2+a^2-fah][k^2+(1-n)p^2+(q+nfp)q] \\ -n[k^2-(a'-fh)q+(h'-h)p][k^2-a'q+(h'-h-fa)p] = \mathrm{D}, \end{array}$$

et conservant, aussi pour simplifier, les lettres φ et ω à la place de leurs valeurs dans les quatre dernières expressions.

Le dénominateur D sera, en général, une quantité positive; et les conditions φ et ω positives seront remplies lorsque la quantité $c-(a-fh)\sin\theta$ sera positive, et qu'en même temps α et p seront négatives, ce qui suppose l'axe des tourillons au-dessus de celui de la pièce : elles pourront encore être satisfaites dans d'au-

tres cas, que l'on reconnaîtra par le calcul numérique des valeurs de ces vitesses φ et ω.

13. Voici présentement les observations les plus générales auxquelles ces diverses valeurs des percussions peuvent donner lieu, soit quand les roues sont soulevées, soit lorsqu'elles ne le sont pas.

Lorsqu'on diminue le poids de la pièce, la fraction n devient plus petite, et la fraction n' augmente; si l'on ne fait aucun autre changement au système, son centre de gravité s'éloignera de l'axe de la pièce, et la valeur de c sera plus grande. Or, l'inspection des formules que nous venons de donner; pour tous les cas que nous avons considérés, montre que ces variations de n, n', c, augmenteront généralement l'intensité des percussions que les différentes parties du système auront à supporter ; d'où il résulte que, toutes choses d'ailleurs égales, les pièces les plus légères sont celles qui doivent fatiguer le plus leurs affûts; ce qui est confirmé par l'observation.

En augmentant le poids des roues, on augmente la fraction n', et les percussions qui ont lieu aux extrémités de l'essieu en deviennent plus grandes; l'essieu souffre donc davantage quand les roues ont une masse plus considérable, ce qui est aussi conforme à l'expérience.

La valeur de E est toujours positive : cette composante horizontale agit donc sur la roue, dans le sens du recul, et sur l'essieu, dans le sens opposé (n° 4). Ainsi, l'effet du tir est de tendre à fléchir l'essieu horizontalement, en le rendant convexe du côté de la culasse; et, effectivement, après qu'on a tiré un grand nombre de coups, on trouve que l'essieu a pris, dans le sens horizontal, une courbure dont la convexité est tournée en arrière.

L'autre composante F est positive ou négative, selon que les roues sont soulevées, ou qu'elles demeurent en contact avec le terrain : elle agira donc sur les roues, en sens contraire de la gravité, dans le premier cas, et suivant la direction de la pesanteur, dans le second; et *vice versa* par rapport à l'essieu. Par conséquent l'effet du tir, dans le sens vertical, est de tendre à augmenter la convexité naturelle de l'essieu qui est tournée vers le haut, lorsque les roues sont soulevées, et, au contraire, de tendre à diminuer cette courbure, quand les roues restent appuyées sur le terrain. Toutefois, dans le premier cas, les roues, après avoir été soulevées, retombent sur la terre, et l'effet de ce choc en retour doit être de diminuer la convexité de l'essieu, que le choc direct avait augmentée. Il serait donc impossible de décider, *à priori*, si l'essieu doit devenir plus convexe ou moins

convexe dans le sens vertical, après un grand nombre de coups. On a reconnu dans la pratique que sa convexité est toujours augmentée, ce qui peut venir de ce qu'il résiste moins, d'après sa construction, à se courber davantage qu'à se redresser ; mais un accroissement de convexité, tournée vers le haut, ne pouvant avoir lieu que dans le cas où les roues sont soulevées, on conclura du fait que nous venons de citer que ce cas est celui qui arrive le plus souvent, quoique le soulèvement des roues puisse être insensible à la vue : c'est aussi ce qui résulte de la condition relative au cas contraire (n° 8), qui doit être rarement satisfaite dans le tir le plus ordinaire, où l'inclinaison de la pièce est peu considérable.

RÈGLES

POUR

CALCULER LA GRANDEUR

ET

LA DURÉE DU RECUL.

PREMIER CAS,

Dans lequel les roues et les crosses demeurent en contact avec le terrain.

14. La détermination du recul est une question bien plus compliquée qu'elle ne le paraît d'abord. La principale difficulté qu'elle présente provient de ce que l'action du frottement des roues contre le terrain n'est pas la même pendant toute la durée du mouvement. La manière dont nous considérerons ce genre de forces, soit dans les percussions, soit dans les mouvements continus, pourra être utile dans d'autres occasions, et, par exemple, dans la théorie du tirage des voitures, qui n'a pas encore été donnée par les géomètres.

Ce problème est très différent selon que les roues sont ou ne sont pas soulevées; nous nous occuperons successivement de ces deux cas, en commençant par le plus simple, celui où les roues et les crosses restent en contact avec le terrain. Mais pour simplifier la question nous supposerons, dans ce premier cas et dans le second, que la culasse ne se sépare pas de la vis de pointage, et que l'une est attachée à l'autre, si cela est nécessaire, avec une force suffisante. Nous négligerons aussi, comme précédemment (n° 4), le frottement des roues contre l'essieu; et nous continuerons d'employer toutes les notations du n° 3.

15. Cela étant, désignons par P le poids du système entier, dont la masse est M, en sorte qu'en représentant à l'ordinaire par g la force accélératrice de la gravité, on ait

$$P = Mg.$$

Soient, à un instant quelconque, t le temps écoulé depuis l'origine du mouvement, et x la distance du centre de gravité du système à un plan fixe, perpendiculaire à la direction du recul : $\frac{dx}{dt}$ sera, à cet instant, la vitesse de translation commune à tous les points du système, et M $\frac{dx}{dt}$ la quantité de

mouvement dans le sens horizontal, dont la valeur à l'origine est celle de X du n° 8. Donc en faisant $\mu = Mv$, c'est-à-dire en désignant par v la vitesse du projectile à la bouche du canon, diminuée dans le rapport de sa masse à celle du système entier (*), nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = (\cos\theta - f\sin\theta)v,$$

quand $t = 0$. Le recul sera terminé dès que cette vitesse initiale aura été épuisée, et qu'on aura

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Représentons au bout du temps t, par Q et Q' les forces égales et contraires aux pressions de chaque crosse et de chaque roue contre le terrain; les frottements aux mêmes points seront fQ et fQ', et la vitesse du recul n'étant jamais très grande, le coefficient f en sera indépendant, et devra être regardé comme constant pendant toute la durée du mouvement.

Soit encore, au même instant, u la vitesse angulaire commune à tous les points des roues; sa valeur à l'origine sera celle de ψ du n° 7,

---

(*) Note deuxième à la fin de l'ouvrage.

savoir :

$$\frac{[\varsigma - (a - fh)\sin\theta] frv}{(b - fr)n'k'^2},$$

d'après la valeur de R du numéro suivant.

A cette époque, la vitesse de rotation ru des points inférieurs des roues ne sera pas égale et contraire à leur vitesse de translation ; la seconde vitesse l'emportera sur la première, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{dx}{dt} + ru > 0;$$

et cette inégalité subsistera pendant un certain temps. Or, tant qu'elle aura lieu, le frottement entier fQ' de chaque roue contre le terrain exercera toute son action; mais dès que ces deux vitesses seront devenues égales et contraires, ou qu'on aura

$$\frac{dx}{dt} = -ru;$$

une partie seulement de ce frottement subsistera, et son action entretiendra cette égalité jusqu'à la fin du mouvement. Nous exprimerons par ρ ce frottement partiel. Cette force agira dans le sens du recul, ou en sens contraire, selon qu'elle sera positive ou négative; mais il faudra toujours qu'abstraction faite du signe, on ait

$$\rho < fQ'.$$

16. Nous voyons par là qu'il sera nécessaire de distinguer deux intervalles de temps dans la durée du recul : l'un pendant lequel les roues glisseront et tourneront à la fois, tandis que dans l'autre le glissement aura disparu, et la vitesse absolue des points inférieurs sera constamment nulle. Dans le premier intervalle, les forces motrices de tous les points du système, prises en sens contraires de leurs directions, feront équilibre, à chaque instant, aux forces $2Q$, $2Q'-2fQ$, $-2fQ'$, et au poids P du système ; et pendant le second, elles feront équilibre à ces mêmes forces, à l'exception de $-2fQ'$, qu'il faudra remplacer par la force 2ρ, dont le rapport à la pression Q' est inconnu.

En ayant seulement égard aux mouvements de translation du système, les forces motrices de tous ses points auront pour résultante une force horizontale, passant par son centre de gravité et égale à $M\frac{d^2x}{dt^2}$; la somme des forces motrices de tous les points de chaque roue, dues à sa rotation autour de l'essieu, est égale à zéro, dans le sens horizontal et dans le sens vertical ; la somme de leurs moments sera exprimée par $m'k'^2\frac{du}{dt}$, quel que soit l'axe auquel ils sont rapportés (n° 5), les trois équations de l'équilibre dont il est question seront donc, pendant le pre-

mier intervalle de temps,

$$2fQ + 2fQ' + M\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$2Q + 2Q' - P = 0,$$

$$aP - 2bQ' + hM\frac{d^2x}{dt^2} - 2m'k'^2\frac{du}{dt} = 0;$$

les moments étant pris, dans la troisième, par rapport à la droite de contact des crosses avec le terrain.

Ces équations renferment les quatre inconnues Q, Q', x, u : il en faudra donc une de plus pour résoudre le problème. Nous l'obtiendrons en considérant les roues isolément, et formant l'une des équations d'équilibre de leurs quantités de mouvement infiniment petites, perdues à chaque instant, savoir, l'équation des moments rapportés à l'axe de l'essieu, qui sera alors

$$rfQ' + m'k'^2\frac{du}{dt} = 0,$$

puisque nous négligeons le frottement des roues contre l'essieu.

Pendant le second intervalle de temps, on aura de même quatre équations qui se déduiront des précédentes, en remplaçant, dans la première et la dernière, la force $-fQ'$ par ρ, et faisant

$$u = -\frac{dx}{rdt}.$$

On aura, de cette manière,

$$2fQ - 2\rho + M\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$2Q + 2Q' - P = 0,$$

$$aP - 2bQ' + \left(h + \frac{n'k'^2}{r}\right)M\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$2r\rho + \frac{n'k'^2}{r}M\frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

et les quatre inconnues seront Q, Q′, ρ, x.

17. On tire des quatre premières équations :

$$Q = \frac{[b - a + f(h - r)]P}{2(b - fr)},$$

$$Q' = \frac{(a - fh)P}{2(b - fr)},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -fg,$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{fgr(a - fh)}{n'k'^2(b - fr)}.$$

En intégrant les deux dernières formules et ayant égard aux valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et de u, qui ont lieu quand $t = 0$, il vient

$$\frac{dx}{dt} = (\cos\theta - f\sin\theta)v - fgt,$$

$$u = \{[c - (a - fh)\sin\theta]v - (a - fh)gt\}\frac{fr}{n'k'^2(b - fr)}.$$

Soit t_1 le temps écoulé lorsqu'on aura $u = -\frac{dx}{rdt}$, ou la durée du premier intervalle, nous aurons

$$t_1 = (\cos\theta - f\sin\theta)(b - fr)\,n'k'^2 + [c - (a - fh)\sin\theta]\,fr^2]\frac{v}{Dfg},$$

et, pour la vitesse à la fin de cet intervalle,

$$\frac{dx}{dt} = [(a - fh)\cos\theta - fc]\,\frac{r^2v}{D},$$

en faisant, pour abréger,

$$(b - fr)n'k'^2 + (a - fh)r^2 = D.$$

Si l'on désigne par x_1 la longueur du recul pendant le temps t_1, on aura, par une seconde intégration,

$$x_1 = (\cos\theta - f\sin\theta)\,vt_1 - \frac{fgt_1^2}{2},$$

où il n'y aura plus qu'à mettre pour t_1 sa valeur précédente.

Les quatre dernières équations du numéro précédent donnent

$$Q = (b - a)(r^2 + n'k'^2)\,\frac{P}{2D'},$$

$$Q' = [(a - fh)r^2 + (a - fr)n'k'^2]\frac{P}{2D'},$$

$$\rho = \frac{(b - a)fn'k'^2P}{2D'},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{(b - a)fgr^2}{D'},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$(b - fh) r^2 + (b - fr) n'k'^2 = D',$$

A cause que $b - a$ est une petite partie de b, ρ est aussi une petite partie de $\frac{1}{2} f P$, et Q' diffère peu de $\frac{1}{2}$ P, de sorte que la condition $\rho < fQ'$ se trouve remplie.

Si l'on intègre la dernière formule, et qu'on ait égard à la valeur de $\frac{dx}{dt}$, qui répond à la fin du premier intervalle ou à $t = t_1$, on aura

$$\frac{dx}{dt} = [(a - fh) \cos\theta - fc] \frac{r^2 v}{D} - \frac{(b - a) r^2 fg (t - t_1)}{D'},$$

pour toutes les valeurs de t qui surpassent t_1. En supposant donc qu'on ait $t = t_1 + t_2$, à la fin du recul, ou quand $\frac{dx}{dt} = 0$, nous en conclurons

$$t_2 = \frac{D'}{D} \cdot \frac{[(a - fh) \cos\theta - fc] v}{(b - a) fg}.$$

Désignant ensuite par x_2 la longueur du recul pendant le temps t_2, nous aurons cette expression

$$x_2 = \frac{[(a - fh) \cos\theta - fc] r^2 v t_2}{D} - \frac{(b - a) r^2 fg t_2^2}{2D'},$$

dans laquelle il faudra substituer pour t_2 sa valeur précédente.

La durée totale du recul et sa longueur entière, qu'il s'agissait de déterminer, seront t_1+t_2 et $x_1 + x_2$. On devra se souvenir que ces formules ne sont pas applicables au cas du tir horizontal, et qu'elles supposent la quantité $(a - fh)\sin\theta - c$ positive ou nulle (nº 8).

DEUXIÈME CAS,

Dans lequel les roues et les crosses sont soulevées alternativement.

18. Dans le cas du numéro **10**, où les roues sont détachées du sol par l'action de la poudre, elles sont d'abord soulevées jusqu'à une certaine hauteur, puis elles retombent et viennent frapper le terrain. L'effet de ce choc est, en général, d'imprimer au système un mouvement de rotation autour de l'essieu : les crosses sont soulevées; elles retombent à leur tour sur le terrain; ce nouveau choc soulève une seconde fois les roues; et ainsi de suite. Pendant la durée du recul, et même après qu'il est fini, le système tourne donc alternativement autour de l'extrémité des crosses et autour de l'essieu : de sorte que la

question qu'il s'agit maintenant de résoudre consiste à déterminer la durée de chacune de ces rotations successives, la longueur du recul qui lui correspond, et les effets du choc qui la termine ; effets qu'il est nécessaire de connaître aussi bien que ceux de l'action immédiate de la poudre, pour juger de tous les efforts auxquels les différentes parties du système devront être capables de résister.

19. Relativement à la première rotation, nous représenterons, comme plus haut, par x la distance, au bout du temps t, du centre de gravité du système à un plan fixe, perpendiculaire à la direction du recul, et passant par la position initiale de ce point; nous désignerons, au même instant, par z l'angle décrit par ce même point autour de l'axe passant par les extrémités des crosses; par u la vitesse angulaire des roues due à leur rotation autour de l'essieu; par Z la force égale et contraire à la pression exercée par chaque crosse contre le terrain, et par conséquent, par fZ le frottement au même point. La vitesse de translation du système et sa vitesse angulaire de rotation seront, à un instant quelconque, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$; leurs valeurs initiales et celle de u résulteront des n^{os} **10** et **11**; en sorte que, pour

$t = 0$, nous aurons

$$\frac{dz}{dt} = \varphi, \quad u = \varphi,$$

$$\frac{dx}{dt} = (\cos\theta - f\sin\theta)\,\nu - (h + fa)\,\varphi,$$

en faisant toujours $\mu = M\nu$, et conservant la lettre φ à la place de sa valeur, savoir :

$$\varphi = \frac{[c - (a - fh)\sin\theta]\,\nu}{K^2 - n'k'^2 + a^2 - fah}.$$

Si l'angle z pouvait devenir un peu considérable, les valeurs de x et des autres inconnues du problème en fonctions de t ne pourraient s'exprimer que par des séries très compliquées : c'est pourquoi nous supposerons cet angle constamment très petit, ce qui est d'ailleurs conforme à l'expérience, et nous bornerons l'approximation au premier terme de chacune de ces valeurs en séries.

20. Pendant cette première rotation, les forces motrices de tous les points du système, dues aux mouvements de translation et de rotation, et prises en sens contraire de leurs directions, devront faire équilibre à son poids P, et aux forces verticale et horizontale $2Z$ et $-2fZ$, appliquées à l'extrémité des crosses. L'angle z étant supposé très petit, on pourra, dans l'expression de ces

forces motrices et de leurs moments, regarder les coordonnées horizontale et verticale du centre de gravité du système, comptées de cette extrémité, comme constantes et égales à a et h, qui sont leurs valeurs initiales. D'après cela les trois équations nécessaires à cet équilibre, formées de la même manière que les trois premières équations du n° **6**, seront

$$2fZ + M\frac{d^2x}{dt^2} + hM\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

$$2Z - P - aM\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$aP + hM\frac{d^2x}{dt^2} + (K^2 + a^2 + h^2)M\frac{d^2z}{dt^2} - 2m'k'^2\frac{du}{dt} = 0;$$

les moments étant pris, dans la troisième équation, par rapport à l'axe de rotation.

Si l'on considère de même, à un instant quelconque, l'équilibre des quantités de mouvement infiniment petites, perdues par tous les points de chaque roue, l'une des trois équations nécessaires à cet équilibre sera

$$m'k'^2\frac{du}{dt} - m'k'^2\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

en faisant toujours abstraction du frottement contre l'essieu. Les deux autres serviraient à déterminer les pressions horizontale et verticale

que supportent les extrémités de l'essieu, et dont la connaissance serait inutile à la solution de notre problème. Cette équation est celle des moments que l'on a pris par rapport à l'axe de l'essieu, afin de rendre nuls ceux du poids de la roue et de la force horizontale due à son mouvement de translation. En supprimant le facteur $m'k'^2$, intégrant et observant que la valeur initiale de u est la même que celle de $\frac{dz}{dt}$, nous aurons, pendant toute la durée de la première rotation,

$$u = \frac{dz}{dt}.$$

Les équations précédentes donnent ensuite

$$Z = \frac{1}{2} P - \frac{a(a - fh)P}{2H^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{(a - fh)g}{H^2},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -fg + \frac{(h+fa)(a-fh)g}{H^2},$$

où l'on a fait, comme dans le n° 11,

$$K^2 - n'k'^2 + a^2 - fah = H^2.$$

En ayant égard aux valeurs initiales de $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{dx}{dt}$,

et intégrant les deux dernières formules, on aura

$$\frac{dz}{dt} = \frac{[c - (a - fh)\sin\theta]\, v - (a - fh)\, gt}{H^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = (\cos\theta - f\sin\theta)v - fgt$$

$$+ \frac{\{(a - fh)\, gt - [c - (a - fh)\sin\theta]\, v\}(h + fa)}{H^2},$$

et, par une seconde intégration, on obtiendra les valeurs de x et z.

L'angle z croîtra jusqu'à ce qu'on ait $\frac{dz}{dt} = 0$; il décroîtra ensuite pendant un temps égal à celui de son accroissement, après lequel il sera redevenu nul, et la première rotation sera achevée. En désignant donc sa durée totale par s, nous aurons

$$s = \frac{2[c - (a - fh)\sin\theta]\, v}{(a - fh)\, g}.$$

Les valeurs de $\frac{dz}{dt}$ et de u, à la fin de cette rotation, seront égales et de signes contraires à leurs valeurs initiales, c'est-à-dire égales à $-\varphi$. En même temps, la valeur de $\frac{dx}{dt}$ sera

$$\frac{dx}{dt} = \left(\cos\theta + f\sin\theta - \frac{2fc}{a - fh} + \frac{[c - (a - fh)\sin\theta](h + fa)}{H^2}\right) v.$$

Enfin, si l'on appelle y la valeur de x, qui répond à $t = s$, ou la longueur du recul pendant la première rotation, on aura

$$y = \frac{2 [(a - fh) \cos \theta - fc] [c - (a - fh) \sin \theta] v^2}{(a - fh)^2 g}.$$

21. Le choc des roues contre le terrain, qui terminera cette première rotation, détruira la vitesse $-\varphi$ dont tous les points du système seront animés à cet instant; en même temps les crosses seront soulevées, et le système prendra un nouveau mouvement de rotation, qui aura lieu autour de l'axe de l'essieu, et dont nous représenterons la vitesse angulaire initiale par φ'. Nous représenterons également les percussions qu'éprouveront les différentes parties du système par les mêmes lettres que dans le n° 4, avec un accent supérieur. Ainsi, R′ désignera la percussion qui aura lieu au point le plus bas de chaque roue; E′ et F′ exprimeront les composantes horizontale et verticale de la percussion exercée à l'endroit où chaque roue est traversée par l'essieu; T′ et S′ seront les composantes, dans les mêmes sens, de la percussion qu'éprouvera l'encastrement de chaque tourillon, et V′ exprimera la percussion sur la vis de pointage, le tout comme dans le numéro cité.

A cause de la mobilité des roues autour de l'essieu, le choc leur imprimera une vitesse an-

gulaire différente de la vitesse φ' qu'elles prendraient si elles étaient enrayées. Nous la représenterons par $\varphi' + \psi'$; en sorte que, $-\varphi$ étant, comme on vient de le voir, la vitesse des roues autour de l'essieu à la fin de la première rotation, ou immédiatement avant le choc, $-\varphi+\varphi'+\psi'$ sera leur vitesse autour du même axe, immédiatement après, ou au commencement de la seconde rotation.

Enfin, le choc dont nous voulons déterminer les effets imprimera à tous les points du système un accroissement de vitesse de translation. Nous représenterons par X' la résultante des quantités de mouvement due à cette addition de vitesse : cette résultante sera une force horizontale, passant par le centre de gravité du système.

Il s'agira donc de déterminer les neuf inconnues φ', R', E', F', T', S', V', X', ψ', d'après la valeur de la vitesse φ, citée plus haut (n° **19**).

Pour cela, observons que l'équilibre doit exister, soit dans le système entier, soit par rapport à la pièce, ou à chaque roue isolément, entre les quantités de mouvement de tous leurs points, dues à la vitesse $-\varphi$ et détruites par le choc; celles que le choc leur imprimera et qui devront être prises en sens contraires de leurs directions; et les résistances R', E', etc. Or, il est aisé de voir que les équations relatives à ces équilibres se déduiront de celles du n° **6**, en y supprimant

les forces μ et N, ainsi que la vitesse ω, puisqu'on ne suppose aucune rotation particulière de la pièce autour des tourillons; en accentuant les lettres R, E, F, T, S, V, X, ψ; conservant sans changement les termes qui contiennent la lettre φ; et ajoutant ceux qui doivent résulter de la vitesse φ', prise en sens contraire de sa direction.

Les sommes des quantités de mouvement dues à cette dernière vitesse angulaire, qui a lieu autour de l'axe de l'essieu, et la somme de leurs moments rapportés à un axe quelconque, s'obtiendront facilement au moyen de la proposition du n° 5. S'il est question, par exemple, du système entier, les résultantes horizontale et verticale des quantités de mouvement de tous les points seront exprimées par

$$-(h-r)\,M\varphi' \quad \text{et} \quad (b-a)\,M\varphi';$$

et la somme de leurs moments, par rapport à l'axe passant par les extrémités des deux crosses, aura pour valeur

$$[K^2 - a(b-a) + h(h-r)]\,M\varphi';$$

ce qui résulte de ce que les coordonnées du centre de gravité du système sont $h-r$ et $b-a$, ou h et $-a$, selon qu'elles sont comptées à partir de l'axe de rotation, ou à partir de

celui des moments, dans un plan perpendiculaire à ces deux droites.

De cette manière, nous aurons pour les neuf équations du problème proposé :

$$-2fR' - X' - hM\varphi + (h-r)M\varphi' = 0,$$

$$2R' - aM\varphi - (b-a)M\varphi' = 0,$$

$$2bR' - hX' - (K^2 + a^2 + h^2)M\varphi + 2m'k'^2\psi' + [K^2 - a(b-a) + h(h-r)]M\varphi' = 0,$$

$$V'\sin\theta' - 2T' - nX' - nh'M\varphi + n(h'-r)M\varphi' = 0,$$

$$V'\cos\theta' - 2S' - na'M\varphi - n(b-a')M\varphi' = 0,$$

$$-tV' - npX' - n(k^2 - a'q + h'p)M\varphi + n[k^2 + (b-a')q + (h'-r)p]M\varphi' = 0,$$

$$E' - fR' - \frac{1}{2}n'X' - \frac{1}{2}n'rM\varphi = 0,$$

$$F' + R' - \frac{1}{2}n'bM\varphi = 0,$$

$$rfR' - \frac{1}{2}n'k'^2M\varphi + m'k'^2\psi' + \frac{1}{2}n'k'^2M\varphi' = 0.$$

Les valeurs des inconnues qu'on déduira de ces équations pourront être positives ou négatives, à l'exception de celles de φ' et R', qui devront nécessairement être positives.

22. En résolvant ces neuf équations, et faisant,

pour abréger,

$$K^2 - n'k'^2 + (b-a)^2 + f(b-a)(h-r) = H'^2,$$

on trouve

$$\phi' = \varphi - [b - a + f(h - r)] \frac{b\varphi}{H'^2},$$

$$X' = -(r + fb) M\phi - [h - r - f(b - a)] [b - a + f(h - r)] \frac{bM\varphi}{H'^2},$$

$$R' = \frac{1}{2} (K^2 - n'k'^2) \frac{bM\varphi}{H'^2},$$

$$V' = \left\{ q + fp - \frac{[b-a+f(h-r)]}{H'^2} [k^2 + (h'-h)p - (a'-a)q + (q+fp)(b-a)] \right\} \frac{nbM\varphi}{l},$$

$$T' = \frac{1}{2} V' \sin\theta' + \frac{1}{2} \{ f(K^2 - n'k'^2)(h'-h)[b-a+f(h-r)] \} \frac{nbM\varphi}{H'^2},$$

$$S' = \frac{1}{2} V' \cos\theta' - \frac{1}{2} \{ K^2 - n'k'^2 + (a'-a)[b-a+f(h-r)] \} \frac{nbM\varphi}{H'^2},$$

$$E' = \frac{1}{2} \{ f(1-n')(K^2 - n'k'^2) - n'(h-r)[b-a+f(h-r)] \} \frac{bM\varphi}{H'^2},$$

$$F' = -\frac{1}{2} \{ (1-n')(K^2 - n'k'^2) - n'(b-a)[b-a+f(h-r)] \} \frac{bM\varphi}{H'^2},$$

$$\psi' = -[frK^2 - n'k'^2(b - a + fh)] \frac{b\varphi}{n'k'^2 H'^2},$$

où il ne restera plus qu'à substituer la valeur de φ du n° 19.

La valeur de R′ est évidemment positive. Celle de φ' le sera aussi, en général, à cause de la petitesse de la partie négative qu'elle renferme;

si cependant elle était négative dans un cas particulier, cela signifierait que les crosses ne sont pas soulevées : en sorte qu'il faudrait supprimer φ' dans les équations du numéro précédent, et y introduire une force N' qui exprimerait la percussion que chacune des deux crosses éprouverait, et dont la valeur devrait être positive.

On peut aussi remarquer que la valeur de V' pourra être négative, quoique les tourillons soient au-dessous de l'axe de la pièce, et que la valeur de V du n° **11** soit positive : d'où il résulte que le choc des roues contre le terrain pourra quelquefois soulever la culasse, si elle n'est pas attachée à la vis de pointage, et faire tourner la pièce autour des tourillons, lors même que cela n'aurait pas eu lieu par l'effet immédiat du tir.

23. Après ce choc des roues contre le terrain, la seconde rotation commencera autour de l'essieu avec la vitesse augulaire φ'. En même temps, la vitesse de translation du système sera la valeur finale de $\frac{dx}{dt}$ du n° **20**, augmentée de la quantité $\frac{X'}{M}$: sa valeur sera donc connue, et nous la représenterons, pour abréger, par v'. La vitesse angulaire des roues, au même instant, sera $-\varphi+\varphi'+\psi'$, comme on l'a dit plus haut;

nous désignerons par ϵ', la partie $-\varphi+\psi'$, dont elle diffère de la vitesse φ' commune à tous les points du système; et, d'après le numéro précédent, nous aurons

$$\varphi+\epsilon' = -(K^2 - n'k'^2)\frac{fbr\varphi}{n'k'^2H'^2}.$$

Au bout du temps t compté de l'origine du mouvement, nous représenterons, pendant cette seconde rotation, par x' la distance du centre de gravité du système à un plan fixe, perpendiculaire à la direction du recul; par z' l'angle décrit par ce point autour de l'axe de l'essieu, et par u' la vitesse angulaire de rotation particulière aux points des roues. Les vitesses de translation et de rotation communes à tous les points du système seront $\frac{dx'}{dt}$ et $\frac{dz'}{dt}$; et l'on aura

$$\frac{dx'}{dt} = v', \quad \frac{dz'}{dt} = \varphi'; \quad u' = \epsilon',$$

pour $t = s$, la valeur de s étant donnée par le n° 20.

Soit encore, au bout du temps t, Z' la force égale et contraire à la pression que chaque roue exerce contre le terrain; fZ' sera le *maximum* du frottement qui aura lieu au même point. Or, au commencement de la seconde rotation, la vitesse de translation l'emportera généralement

sur la vitesse de rotation : par conséquent le frottement fZ' aura tout son effet, et cette force agira en sens contraire du recul, du moins pendant une partie du temps que durera cette rotation.

D'après cela les forces motrices de tous les points du système, dues aux mouvements de translation et de rotation, et prises en sens contraire de leurs directions, feront équilibre à son poids, et aux forces verticale et horizontale $2Z'$ et $-2fZ'$ qui agissent aux points inférieurs des roues. Pour cet équilibre, il faudra qu'on ait les trois équations

$$-2fZ' - M\frac{d^2x'}{dt^2} + (h-r)M\frac{d^2z'}{dt^2} = 0,$$

$$2Z' - P - (b-a)M\frac{d^2z'}{dt^2} = 0,$$

$$2bZ' - aP - hM\frac{d^2x'}{dt^2} + [K^2 - a(b-a) + h(h-r)]M\frac{d^2z'}{dt^2} + 2m'k'^2\frac{du'}{dt} = 0;$$

les moments étant pris, dans la troisième, par rapport à la droite menée par les points de contact des crosses avec le terrain, quoique cette droite ne soit pas l'axe de rotation. Nous supposons ici, comme dans le n° 20, l'angle décrit par le centre de gravité du système autour de

l'axe de rotation, constamment très petit, de sorte que les coordonnées horizontale et verticale de ce centre, et celles de l'extrémité des crosses, comptées à partir de l'essieu, sont sensiblement constantes et égales à leurs valeurs initiales.

Les forces motrices de tous les points de chaque roue, prises en sens contraire de leurs directions, feront équilibre à son poids et aux forces Z' et $-fZ'$; prenant donc les moments par rapport à l'axe de l'essieu, ce qui fait disparaître ceux du poids et de Z', nous aurons

$$rfZ' + \frac{1}{2} n'k'^2 M\left(\frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{du'}{dt}\right) = 0,$$

pour l'une des trois équations nécessaires à cet équilibre; les deux autres, que nous nous dispensons d'écrire, serviraient à déterminer les pressions horizontale et verticale aux extrémités de l'essieu.

24. On tire des quatre équations précédentes

$$Z' = \frac{1}{2} P - (b-a)\,[b-a+f(h-r)]\,\frac{P}{2H'^2},$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -fg - [h-r-f(b-a)][b-a+f(h-r)]\frac{g}{H'^2},$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = -\,[b-a+f(h-r)]\,\frac{g}{H'^2},$$

$$\frac{du'}{dt} + \frac{d^2z'}{dt^2} = -\frac{(K^2 - n'k'^2)rfg}{n'k'^2H'^2};$$

la quantité H'^2 étant la même que dans le n° 22.

Si la vitesse absolue du point le plus bas de chaque roue ne devient pas nulle pendant la durée de la rotation que nous considérons, ces formules s'appliqueront à la rotation toute entière. L'intégration des trois dernières fera connaître, à un instant quelconque, les valeurs de x' et z' et des vitesses $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, u', d'après leurs valeurs initiales, ou correspondantes à $t = s$; on aura, par exemple,

$$\frac{dx'}{dt} = v' - fg(t-s) - [h-r-f(b-a)][b-a+f(h-r)]\frac{g(t-s)}{H'^2},$$

$$\frac{dz'}{dt} = \varphi' - [b-a+f(h-r)]\,\frac{g(t-s)}{H'^2},$$

$$u' + \frac{dz'}{dt} = \epsilon' + \varphi' - \frac{(K^2 - n'k'^2)rfg(t-s)}{n'k'^2H'^2},$$

L'angle z' croîtra et décroîtra pendant des temps égaux entre eux et à la moitié de la durée totale de la rotation; et si l'on appelle s' cette durée, on aura

$$s' = \frac{2\varphi' H'^2}{[b-a+f(h-r)]g}.$$

A la fin de la rotation, la vitesse angulaire

$\frac{dz'}{dt}$ sera $-\varphi'$, c'est-à-dire égale et de signe contraire à ce qu'elle était au commencement. Les vitesses $\frac{dx'}{dt}$ et u' auront pour valeurs finales

$$\frac{dx'}{dt} = v' - \frac{2H'^2 f\varphi'}{b-a+f(h-r)} - 2[h-r-f(b-a)]\varphi',$$

$$u' = \epsilon' + 2\varphi' - \frac{2(K^2 - n'k'^2)fr\varphi'}{n'k'^2[b-a+f(h-r)]}.$$

Désignons enfin par y' la grandeur du recul pendant la seconde rotation, et supposons que le plan fixe d'où la distance x' est comptée, soit la position du centre de gravité du système à la fin de la première, de sorte qu'on ait $x' = 0$ quand $t = s$, et $x' = y'$ quand $t = s + s'$; la valeur de y' sera

$$y' = \frac{2H'^2\varphi'}{[b-a+f(h-r)]g}\left\{v' - \frac{H'^2 f\varphi'}{b-a+f(h-r)} - [h-r-f(b-a)]\varphi'\right\}.$$

Mais il n'en sera plus de même, lorsque la vitesse absolue du point de contact de chaque roue avec le terrain, deviendra nulle avant la fin de la rotation. Or, cette vitesse à un instant quelconque est $\frac{dx'}{dt} + r\left(\frac{dz'}{dt} + u'\right)$; sa valeur sera par conséquent, d'après les formules

précédentes,

$$\frac{dx'}{dt}+r\left(\frac{dz'}{dt}+u'\right)=v'+r(\varphi'+\iota')$$
$$-\left\{\begin{matrix}n'k'^2[h-r-f(b-a)][b-a+f(h-r)]\\ +f[(K^2-n'k'^2)r^2+n'k'^2H'^2]\end{matrix}\right\}\frac{g(t-s)}{n'k'^2H'^2}.$$

Le coefficient de t dans cette expression étant une quantité négative, cette vitesse diminuera continuellement; et si l'on désigne par $s+s_1$ la valeur de t qui aura lieu quand elle sera nulle, on aura

$$s_1=\frac{n'k'^2H'^2[v'+r(\varphi'+\iota')]}{\{f[(K^2-n'k'^2)r^2+n'k'^2H'^2]+n'k'^2[h-r-f(b-a)][b-a+f(h-r)]\}g}.$$

On comparera donc cette valeur de s_1 à celle de s' : si l'on a $s'<s_1$, la vitesse du point le plus bas de chaque roue ne sera pas nulle avant la fin de la rotation, et les formules précédentes subsisteront pendant toute sa durée; si, au contraire, on a $s'>s_1$, ces formules ne subsisteront que pendant une partie de la rotation, savoir : depuis $t=s$ jusqu'à $t=s+s_1$.

25. Dans ce dernier cas, ces formules donneront, pour la fin du temps $s+s_1$, les vitesses

$$\frac{dx'}{dt}=v'-fgs_1-[h-r-f(b-a)][b-a+f(h-r)]\frac{gs_1}{H'^2},$$
$$\frac{dz'}{dt}=\varphi'-[b-a+f(h-r)]\frac{gs_1}{H'^2}.$$

Si l'on représente, en outre, par x_1 et z_1 les valeurs de x' et z' au même instant, on aura

$$x_1 = v's_1 - \frac{1}{2}fgs_1^2 - [h - r - f(b-a)][b - a + f(h-r)]\frac{gs_1^2}{2H'^2},$$

$$z_1 = \varphi's_1 - [b - a + f(h - r)]\frac{gs_1^2}{2H'^2};$$

et, de cette manière, l'état du système à l'instant où les points inférieurs des roues ont perdu toute leur vitesse absolue, sera complétement déterminé.

A partir de ce moment, le frottement des roues contre le terrain n'exercera plus son action entière; une partie seulement de cette force maintiendra, jusqu'à la fin de la rotation, la vitesse absolue de leurs points inférieurs égale à zéro; nous désignerons, comme dans le n° **15**, ce frottement partiel par ρ. Cette force agira dans le sens du recul ou dans le sens opposé, selon que sa valeur sera positive ou négative; et il faudra qu'on ait $\rho < fZ'$, abstraction faite du signe.

Pendant cette deuxième partie de la seconde rotation, les équations d'équilibre des quantités de mouvement infiniment petites, perdues ou gagnées à chaque instant, se formeront d'après celles du n° **23**, en y remplaçant la force $-fZ'$ par ρ; en sorte que nous aurons ces quatre

équations :

$$2\rho - M\frac{d^2x'}{dt^2} + (h-r)M\frac{d^2z'}{dt^2} = 0,$$

$$2Z' - P - (b-a)M\frac{d^2z'}{dt^2} = 0,$$

$$2bZ' - aP - hM\frac{d^2x'}{dt^2} + [K^2 - a(b-a) + h(h-r)]M\frac{d^2z'}{dt^2}$$

$$+ n'k'^2M\frac{du'}{dt} = 0,$$

$$-r\rho + \frac{1}{2}n'k'^2M\left(\frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{du'}{dt}\right) = 0,$$

auxquelles il faudra joindre celle-ci :

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + r\left(\frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{du'}{dt}\right) = 0,$$

qui résulte de ce que la vitesse $\frac{dx'}{dt} + r\left(\frac{dz'}{dt} + u'\right)$ du point le plus bas de chaque roue est supposée constamment nulle.

On en déduit

$$\rho = \frac{n'k'^2(h-r)(b-a)P}{2D^2},$$

$$Z' = \frac{1}{2}P - \frac{(r^2 + n'k'^2)(b-a)^2P}{2D^2},$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{r^2(h-r)(b-a)g}{D^2},$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = -\frac{(r^2 + n'k'^2)(b-a)g}{D^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$(K^2-n'k'^2)(r^2+n'k'^2)+(r^2+n'k'^2)(b-a)^2+n'k'^2(h-r)^2=D^2.$$

Dans la construction ordinaire des affûts, les distances horizontale et verticale $b-a$ et $h-r$, du centre de gravité du système à l'axe de l'essieu sont très petites, et leurs carrés et leurs produits doivent aussi être très petits par rapport à D; d'où il résulte que la condition $\rho<fZ'$ sera remplie, à moins que le frottement des roues contre le terrain étant très faible, le coefficient f ne soit une très petite fraction. Dans les cas d'exception où cette condition ne serait pas satisfaite, il en faudrait conclure que le frottement n'est pas assez fort pour maintenir nulle la vitesse des points inférieurs des roues, et qu'après l'instant où cette vitesse est devenue égale à zéro, elle prendrait un signe contraire à celui qu'elle avait auparavant. Le frottement exercerait alors toute son action proportionnellement à la pression, après comme avant cet instant; mais sa direction changerait en même temps que celle de la vitesse absolue de son point d'application; par conséquent, les formules du numéro précédent s'appliqueraient, dans ces sortes de cas, à la seconde partie de la rotation, avec l'attention seulement d'y changer le signe de f.

Mais nous supposerons la condition $\rho < fZ'$

remplie, et en intégrant les formules précédentes, et ayant égard aux valeurs de $\frac{dx'}{dt}$ et $\frac{dz'}{dt}$ qui répondent à $t = s + s_1$, nous aurons

$$\frac{dx'}{dt} = v' - fgs_1 - [h - r - f(b - a)][b - a + f(h - r)]\frac{gs_1}{H'^2} - \frac{r^2(h-r)(b-a)g(t-s-s_1)}{D^2},$$

$$\frac{dz'}{dt} = \varphi' - [b - a + f(h-r)]\frac{gs_1}{H'^2} - \frac{(r^2 + n'k'^2)(b-a)g(t-s-s_1)}{D^2},$$

pour toutes les valeurs de $t > s + s_1$. On connaîtra ensuite, pour ces mêmes valeurs, la vitesse u' au moyen de l'équation

$$\frac{dx'}{dt} + r\left(\frac{dz'}{dt} + u'\right) = 0.$$

Une seconde intégration donnera

$$z' = \varphi' s_1 - [b-a+f(h-r)]\frac{gs_1^2}{2H'^2} + \varphi'(t-s-s_1) - [b-a+f(h-r)]\frac{gs_1(t-s-s_1)}{H'^2} - \frac{(r^2+n'k'^2)(b-a)g(t-s-s_1)^2}{2D^2}.$$

La rotation que nous considérons sera terminée quand on aura $z' = 0$; si donc nous désignons par $t = s + s_1 + s_2$, la valeur de t qui aura lieu à cet instant, la quantité s_2 dépendra de l'équation du second degré :

$$\varphi'(s_1 + s_2) - \frac{[b-a+f(h-r)]g(s_1^2 + 2s_1s_2)}{2H'^2} - \frac{(r^2+n'k'^2)(b-a)gs_2^2}{2D^2} = 0,$$

dont elle sera la racine positive; et $s_1 + s_2$ sera la durée de cette rotation. La valeur finale de la vitesse angulaire $\frac{dz'}{dt}$ ne sera plus, comme dans le cas du numéro précédent, égale et contraire à la valeur initiale φ'; en la représentant par $-\varphi'_1$, on aura

$$\varphi'_1 = \frac{[b-a+f(h-r)]gs_1}{H'^2} + \frac{(r^2+n'k'^2)(b-a)gs_2}{D^2} - \varphi'.$$

Les valeurs correspondantes de $\frac{dx'}{dt}$ et u' se déduiront des expressions de ces vitesses à un instant quelconque, en y faisant $t = s + s_1 + s_2$; et si nous représentons par x_2, l'espace parcouru par le centre de gravité du système, nous aurons

$$x_2 = v's_2 - fgs_1s_2 - [h-r-f(b-a)][b-a+f(h-r)]\frac{gs_1s_2}{H'^2} - \frac{r^2(h-r)(b-a)gs_2^2}{2D^2};$$

quantité qu'il faudra ajouter à x_1 pour avoir la longueur du recul pendant toute la durée de la seconde rotation.

26. A la fin de cette rotation, il y aura un choc des crosses contre le terrain, dont les effets seront faciles à déterminer, d'après ce que nous avons déjà vu. Ce choc détruira le mouve-

ment du système autour de l'essieu, et lui en imprimera un autre autour de la droite menée par les extrémités des crosses. Nous représenterons la vitesse initiale de cette troisième rotation par φ''; et généralement nous désignerons par X'', N'', T'', S'', V'', E'', F'', ψ'', les quantités analogues à celles que nous avons représentées par les mêmes lettres sans accent dans le nº 4. Les équations d'équilibre entre les quantités de mouvement perdues ou gagnées, soit par les points du système entier, soit par ceux de la pièce ou de l'une des roues, se déduiront de l'une de celles du nº 6; en y supprimant les forces μ et R et la vitesse ω; mettant deux accents aux lettres ψ, X, N, etc.; puis ajoutant, dans le cas du nº 24, les termes relatifs à la vitesse détruite $-\varphi'$, lesquels seront les mêmes que dans le nº 21; et changeant φ' en φ'_1, si c'est, au contraire, le cas du nº 25 qui a lieu.

De cette manière, nous aurons pour déterminer les neuf inconnues que la question présente, les neuf équations

$$-2fN''-X''-hM\varphi''+(h-r)M\varphi'=0,$$

$$2N''-aM\varphi''-(b-a)M\varphi'=0,$$

$$-hX''-(K^2+a^2+h^2)M\varphi''+2m'k'^2\psi''$$

$$+[K^2-a(b-a)+h(h-r)]M\varphi'=0,$$

$$V''\sin\theta' - 2T'' - nX'' - nh'M\varphi'' + n(k'-r)M\varphi' = 0,$$

$$V''\cos\theta' - 2S'' - na'M\varphi'' - n(b-a')M\varphi' = 0,$$

$$-lV'' - npX'' - n(k^2 - a'q + h'p)M\varphi''$$
$$+ n[k^2 + (b-a')q + (h'-r)p]M\varphi' = 0,$$

$$E'' - \frac{1}{2}n'X'' - \frac{1}{2}n'rM\varphi'' = 0,$$

$$F'' - \frac{1}{2}n'bM\varphi'' = 0,$$

$$-\frac{1}{2}n'k'^2M\varphi'' + m'k'^2\psi'' + \frac{1}{2}n'k'^2M\varphi' = 0;$$

où l'on peut d'abord remarquer que la dernière équation donne $\psi'' = \varphi'' - \varphi'$, ce qui change la troisième en celle-ci :

$$-hX'' - (K^2 - n'k'^2 + a^2 + h^2)M\varphi''$$
$$+ [K^2 - n'k'^2 - a(b-a) + (h-r)]M\varphi' = 0.$$

En résolvant ces équations, on trouve

$$\varphi'' = \varphi' - \frac{(a-fh)b\varphi'}{H^2},$$

$$X'' = -(r+fb)M\varphi' + \frac{(h+fa)(a-fh)bM\varphi'}{H^2},$$

$$N'' = \frac{(K^2 - n'k'^2)bM\varphi'}{2H^2},$$

$$V'' = \left\{q + fp + \frac{(a-fh)[k^2 + (h'-h)p - (a'-a)q - a(q+fp)]}{H^2}\right\}\frac{nbM\varphi'}{l},$$

$$T'' = \frac{1}{2} V'' \sin\theta' + \frac{1}{2} [f(K^2 - n'k'^2) + (h' - h)(a - fh)] \frac{nbM\varphi'}{H^2},$$

$$S'' = \frac{1}{2} V'' \cos\theta' - \frac{1}{2} [K^2 - n'k'^2 - (a' - a)(a - fh)] \frac{nbM\varphi'}{H^2},$$

$$E'' = -\frac{1}{2} [f(K^2 - n'k'^2) - (h - r)(a - fh)] \frac{n'bM\varphi'}{H^2},$$

$$F'' = \frac{1}{2} [K^2 - n'k'^2 - (b - a)(a - fh)] \frac{n'bM\varphi'}{H^2},$$

$$\psi'' = -\frac{(a - fhb)\varphi'}{H^2};$$

la quantité H^2 étant la même que dans le n° **11**, savoir :

$$H^2 = K^2 - n'k'^2 + a^2 - fah.$$

Il ne restera plus qu'à substituer dans ces formules, à la place de φ' sa valeur du n° **22**, ou bien celle de φ'_1 du n° **25**.

La valeur de N'' est positive, ainsi que cela devait être; celle de V'' l'est aussi, en sorte que le choc des crosses contre le terrain ne peut pas, comme celui des roues (n° **22**), faire tourner la pièce autour des tourillons. Dans des cas particuliers la valeur de φ'' pourra se trouver négative; d'où l'on conclura qu'alors le choc des crosses contre le terrain ne soulève pas les roues, comme nous l'avions supposé. On supprimera donc, quand cela arrivera, les termes des équa-

tions d'équilibre qui contiennent φ', et l'on y introduira une force R'' qui exprimera la percussion au point le plus bas de chaque roue, et dont la valeur devra être positive : la formation de ces équations ainsi modifiées, et leur résolution ne présenteront aucune difficulté.

La troisième rotation commencera avec la vitesse φ'' autour des crosses; en même temps la vitesse de translation du système, et la vitesse angulaire des roues autour de l'essieu, seront celles que l'on a déterminées dans le numéro précédent pour la fin de la seconde rotation, augmentées respectivement de $\frac{X''}{M}$ et de ψ''. Ces vitesses initiales étant ainsi connues, on déterminera le mouvement du système pendant la troisième rotation, par l'analyse du n° 20, relative à la première.

27. Sans qu'il soit nécessaire de continuer davantage cette discussion, nous voyons comment on pourra calculer les uns par les autres, les effets des chocs successifs, et les portions de recul entre deux percussions consécutives. Les quantités relatives aux chocs des crosses contre le terrain, se détermineront au moyen des formules du numéro précédent, en y mettant à la place de φ', pour chacun de ces chocs, la vitesse angulaire du système qui avait lieu immédiatement

auparavant, prise avec un signe contraire; et de même, les quantités qui répondent aux chocs des roues contre le terrain seront données, en général, par les formules du n° 22, dans lesquelles on mettra à la place de φ, pour chacun de ces chocs, la vitesse initiale de la rotation dont il est la fin : toutefois ces dernières formules devront être quelquefois modifiées, comme nous allons l'expliquer tout-à-l'heure, vers la fin du recul, lorsque la vitesse de translation du système sera très affaiblie.

Les vitesses initiales des rotations successives du système, ainsi déduites les unes des autres, formeront une série généralement décroissante; de sorte que les oscillations alternatives du système, autour des crosses et autour de l'essieu, s'affaibliront continuellement. Tous les effets des chocs successifs seront proportionnels aux vitesses de rotation qui leur correspondent; par conséquent, les percussions que les différentes parties du système éprouveront pendant le recul, seront aussi de moins en moins considérables.

Le mouvement du système entre deux chocs consécutifs se déterminera par l'analyse du n° 20, ou par celle des n°s 24 et 25, sauf les modifications relatives à la fin du recul dont il nous reste à parler.

28. A l'origine du mouvement, la vitesse de

translation commune à tous les points du système, l'emporte de beaucoup sur la vitesse de rotation du point le plus bas de chaque roue; mais dans la suite, il peut arriver que ces deux vitesses diffèrent peu l'une de l'autre, à l'un des instants où les roues viennent frapper le terrain; et alors il est possible que le frottement, pendant la durée de la percussion, fasse disparaître cette différence, en sorte que la vitesse absolue du point où cette force exerce son action doive être égale à zéro après le choc. On ne doit pas perdre de vue qu'une percussion est une suite de pressions qui ont lieu pendant un temps très court, mais d'une durée finie. Dans le choc des roues contre le terrain, le frottement s'exerce à chaque instant de ce temps très court, en sens contraire de la vitesse actuelle du point le plus bas de chaque roue; son intensité, quand cette vitesse n'est pas nulle, est proportionnelle à la pression qui a lieu au même instant et au même point; cette vitesse varie graduellement pendant la durée du choc; et s'il arrive qu'elle devienne nulle à un certain instant de cette durée, une partie du frottement suffit ensuite, en général, pour la maintenir égale à zéro, jusqu'à la fin de la percussion.

D'après cela, il y aura deux cas à distinguer, selon que le point de contact de chaque roue avec le terrain aura conservé après le choc une

partie de la vitesse qu'il avait auparavant, ou suivant que la vitesse de ce point après le choc devra être tout-à-fait nulle.

Dans le premier cas, le frottement aura exercé son action entière pendant toute la durée du choc : par conséquent la quantité de mouvement qu'il aura produite en sens contraire de la vitesse initiale de ce point de contact sera égale à fR'; R' étant la somme des pressions verticales, ou la percussion que chaque roue aura éprouvée, et f désignant un coefficient donné.

Dans le second cas, au contraire, le frottement n'aura exercé la totalité de son action, que pendant une partie du choc; pendant l'autre partie, son action partielle aura pu être dirigée dans le sens ou en sens contraire de la vitesse précédemment détruite; la quantité de mouvement qu'il aura produite sera inconnue en grandeur et en direction; seulement nous saurons qu'en la représentant par ρ', il faudra qu'on ait $\rho' < f$R', abstraction faite du signe.

En supposant que toutes les notations employées dans le nº 21 se rapportent maintenant à une percussion d'un rang pair quelconque, c'est-à-dire à une percussion où ce sont les roues qui viennent frapper le terrain, les formules de ce numéro s'appliqueront, sans aucune modification, au premier de nos deux cas; mais pour s'assurer qu'il a effectivement lieu, il faudra

comparer la vitesse du point le plus bas de chaque roue avant le choc, calculée d'après les rotations et les chocs précédents, avec sa vitesse après le choc, résultante de ces formules. Si l'on désigne la première vitesse par ζ, et la seconde par ζ', on aura

$$\zeta' = \zeta + \frac{X'}{M} + r(\varphi' + \psi'):$$

il faudra que ces deux vitesses aient la même direction, ou soient de même signe. Pour fixer les idées, nous supposerons que la quantité ζ soit positive; et en mettant à la place de X' et $\varphi' + \psi'$ leurs valeurs données par les formules citées, nous en conclurons

$$\zeta > \frac{\{ f(r^2 + n'k'^2)(K^2 - n'k'^2) + n'k'^2(h-r)[b-a+f(h-r)] \} b\varphi}{n'k'^2 H'^2},$$

pour la condition relative au premier cas; φ représentant la vitesse angulaire du système autour des crosses, au commencement de la rotation terminée par le choc des roues contre le terrain, que l'on considère.

Dans le second cas, on aura

$$M\zeta + X' + rM(\varphi' + \psi') = 0,$$

équation qu'il faudra joindre à celles de l'équili-

bre des quantités de mouvement perdues ou gagnées pendant le choc dont il sera question.

29. Pour obtenir ces équations, il suffira de remplacer dans celles du n° **21**, la force $-f\text{R}'$ par la force inconnue ρ', qui agira dans le sens du recul ou en sens contraire, selon qu'elle sera positive ou négative. Au moyen de la condition $\zeta' = 0$, le nombre des équations restera égal à celui des inconnues; mais pour abréger, nous nous dispenserons de former les valeurs des percussions V′, T′, S′, E′, F′; et nous ne considérerons que les inconnues X', R', φ', ψ', ρ'. Nous n'aurons besoin alors que des quatre équations :

$$2\rho' - \text{X}' - h\text{M}\varphi + (h - r)\,\text{M}\varphi' = 0,$$

$$2\text{R}' - a\text{M}\varphi - (b - a)\,\text{M}\varphi' = 0,$$

$$2b\text{R}' - h\text{X}' - (\text{K}^2 + a^2 + h^2)\text{M}\varphi + 2m'k'^2\psi' + [\text{K}^2 - a(b-a) + h(h-r)]\,\text{M}\varphi' = 0,$$

$$-r\rho' - \tfrac{1}{2}n'k'^2\,\text{M}\varphi + m'k'^2(\varphi' + \psi') = 0,$$

jointes à celles du numéro précédent.

On en déduit

$$\text{X}' = -r\text{M}\varphi - \frac{br^2(h-r)(b-a)\text{M}\varphi}{\text{D}^2} - \frac{n'k'^2[\text{K}^2 - n'k'^2 + (b-a)^2 + (h-r)^2]\text{M}\zeta}{\text{D}^2},$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{b\,(b-a)\,(n'k'^2 + r^2)\,\varphi}{\text{D}^2} - \frac{n'k'^2\,(h-r)\zeta}{\text{D}^2},$$

$$\psi' = \frac{b(b-a)(n'k'^2 + hr)\varphi}{D^2} - \frac{[K^2 r - n'k'^2 h + (b-a)^2 r]\zeta}{D^2},$$

$$R' = \frac{1}{2}\left[bM\varphi - \frac{b(b-a)^2(n'k'^2 + r^2)M\varphi}{D^2} - \frac{n'k'^2(b-a)(h-r)M\zeta}{D^2} \right],$$

$$\rho' = \frac{1}{2}\left[\frac{b(b-a)(h-r)n'k'^2 M\varphi}{D^2} - \frac{[K^2 - n'k'^2 + (b-a)^2]\, n'k'^2 M\zeta}{D^2} \right];$$

le dénominateur D^2 étant la même quantité que dans le n° 25.

Les valeurs de φ' et R' devront être positives, et il faudra qu'on ait $\rho' < fR'$, abstraction faite du signe. La seconde condition revient à ce que les deux quantités $fR' + \rho'$ et $fR' - \rho'$ doivent être de même signe que le coefficient f, lequel est positif dans le cas où la vitesse ζ est dirigée dans le sens du recul, comme nous l'avons supposé.

Or, on aura

$$fR' - \rho' = \frac{bM\varphi}{2D^2}\{f(n'k'^2 + r^2)(K^2 - n'k'^2) - n'k'^2(h-r)[b-a-f(h-r)]\}$$
$$+ \frac{n'k'^2 M\zeta}{2D^2}\{K^2 - n'k'^2 + (b-a)[b-a-f(h-r)]\},$$

$$fR' + \rho' = \frac{bM\varphi}{2D^2}\{f(n'k'^2 + r^2)(K^2 - n'k'^2) + n'k'^2(h-r)[b-a+f(h-r)]\}$$
$$- \frac{n'k'^2 M\zeta}{2D^2}\{K^2 - n'k'^2 + (b-a)[b-a+f(h-r)]\},$$

où l'on voit d'abord que la condition $fR' - \rho' > 0$ sera généralement satisfaite, à cause que la petitesse des lignes $b - a$ et $h - r$, dans la cons-

truction ordinaire des affûts, rend positifs les coefficients des vitesses φ et ζ, dans l'expression de $fR'-\rho'$: il n'y aurait d'exception à l'égard du coefficient de φ que si le frottement des roues contre le terrain était très faible, et le coefficient f une très petite fraction, ce qui n'a pas lieu ordinairement.

Quant à la condition $fR'+\rho'>0$, on en conclura

$$\zeta<\{f(r^2+n'k'^2)(K^2-n'k'^2)+n'k'^2(h-r)[b-a+f(h-r)]\}\frac{b\varphi}{n'k'^4H'^2},$$

H'^2 étant la même quantité que précédemment. En comparant cette inégalité à celle du numéro précédent, on voit que les deux cas énoncés dans ce numéro s'excluent l'un l'autre, et qu'un seul pourra avoir lieu à la fois, ainsi que cela devait effectivement avoir lieu (*).

(*) Cette dernière inégalité étant satisfaite, si la condition $fR'-\rho'$ positive n'était pas remplie, à cause de l'exception très particulière que nous avons indiquée, aucun de ces deux cas ne serait possible, et il en faudrait considérer un troisième. Ce serait celui dans lequel la vitesse du point de contact de chaque roue avec le terrain passerait du positif au négatif pendant la durée du choc ; en sorte qu'elle serait dirigée en sens opposés au commencement et à la fin : dans ce cas, le frottement agirait avec toute son intensité pendant la durée entière de la rotation ; mais pendant une partie, il serait dirigé dans le sens du recul, et pendant l'au-

A cause que l'on a

$$2R' = aM\varphi + (b - a)\,M\varphi',$$

la condition $R' > 0$ sera une suite de $\varphi' > 0$. Or, si l'on met dans l'expression de φ', à la place de ζ, la limite précédente que cette quantité ne peut dépasser, on aura, toute réduction faite,

$$\varphi' > \{K^2 - n'k'^2 - a[b - a + f(h - r)]\}\,\frac{\varphi}{H'^2},$$

et, en général, $\varphi' > 0$, à cause de la petitesse de $b - a$ et $h - r$. Si cependant on avait $\varphi' < 0$ dans un cas particulier, il faudrait supprimer cette vitesse φ' dans les équations du problème, et la remplacer par une force inconnue, pour exprimer la percussion éprouvée par les crosses, qui, dans ce cas, ne seraient pas soulevées. Nous ne nous arrêterons pas à considérer ce cas particulier, qui ne saurait présenter aucune difficulté.

---

tre partie, il agirait en sens contraire; et pour déterminer les effets du choc, il serait nécessaire de considérer ces deux parties séparément. Quoique nous ne nous occupions pas de ce troisième cas, à cause de son peu d'importance dans la question présente, il était bon néanmoins de le mentionner, parce qu'il peut se rencontrer d'autres problèmes relatifs au frottement des corps tournants, où il soit indispensable d'y avoir égard.

Le mouvement du système pendant la rotation autour de l'essieu, qui suivra le choc auquel ces formules se rapportent, se déterminera par l'analyse du n° **24**, en supposant la vitesse du point le plus bas de chaque roue, égale à zéro dès l'origine de cette rotation, et par suite pendant toute sa durée.

30. Au moyen des différentes règles que nous venons d'exposer, on pourra calculer, dans tous les cas, l'espace parcouru à chaque instant par le centre de gravité du système, et la vitesse horizontale dont il est encore animé : on connaîtra donc l'espace total qu'il aura décrit quand cette vitesse sera devenue égale à zéro, lequel espace sera la longueur du recul, dont la durée se trouvera en même temps déterminée. Cette longueur et cette durée dépendront de toutes les quantités comprises dans les formules précédentes, savoir : la vitesse du projectile à la bouche du canon, le rapport de son poids à celui du système entier, le moment d'inertie de ce système, la grandeur du frottement, le rayon et le moment d'inertie des roues, la distance de leurs points inférieurs à l'extrémité des crosses, la hauteur du centre de gravité du système au-dessus du terrain et la distance de sa projection sur le sol à celle de l'essieu, enfin la distance de ce centre à l'axe de la pièce et l'inclinaison du tir.

Dans le cas où le système tourne alternativement autour des crosses et autour de l'essieu, cette dernière distance entre dans l'expression de la vitesse initiale de la première rotation, qui lui est à peu près proportionnelle, quand on tire sous un angle peu considérable (n° 19) : pour cette raison, les variations de cette distance devront influer beaucoup sur le recul. Or, elle varie très sensiblement par rapport à sa propre grandeur, quand on rapproche ou qu'on éloigne l'axe des tourillons de celui de la pièce : la distance de l'un de ces axes à l'autre aura donc aussi une grande influence sur la longueur du recul; ce qui est, en effet, conforme à l'expérience, quoique d'abord il paraisse difficile de se rendre raison d'un semblable résultat, surtout lorsque la pièce ne prend aucun mouvement de rotation autour des tourillons. Il en est de même à l'égard de la longueur de l'affût, ou de la distance comprise entre l'extrémité des crosses et les points inférieurs des roues, qui entre dans les formules précédentes, et dont l'expérience a aussi fait connaître l'influence sur la grandeur du recul.

NOTE PREMIÈRE (*).

Dans la pratique de l'artillerie, on se sert de projectiles d'un diamètre plus petit que le calibre des bouches à feu; par suite, la section de la colonne de gaz qui agit contre le fond de l'âme, est plus grande que celle de la partie qui agit en sens contraire sur le boulet, de toute la surface du vent, passage par lequel le fluide élastique, développé dans la combustion de la poudre, peut s'échapper sans exercer de pression sur le mobile, dans le sens de la direction générale du mouvement. Dans ce cas, il n'y a pas égalité entre les quantités de mouvement communiquées à la bouche à feu et au projectile, puisque le gaz est supposé avoir des tensions égales aux deux extrémités de la colonne fluide, et que les pressions qu'il exerce du côté de la bouche du canon, ne sont pas toutes employées contre le boulet, comme elles le sont, du côté opposé, contre le fond de l'âme. Lorsque le vent, ou orifice par lequel l'écoulement du gaz a lieu, est assez petit pour que le parallélisme des tranches du fluide ne soit pas sensiblement trou-

(*) Cette note et la suivante ont été rédigées par M. le commandant Piobert.

blé, la pression de la colonne entière de gaz et celle de la partie qui agit sur le projectile dans le sens du mouvement, sont entre elles à chaque instant dans le rapport des surfaces des sections de l'âme et du projectile, faites perpendiculairement à la direction du mouvement. Ce même rapport existe aussi entre les quantités de mouvement communiquées à la pièce et au boulet.

Les projectiles des bouches à feu en usage n'ayant qu'un vent assez faible, on pourrait donc admettre que les quantités de mouvement de la pièce et du projectile sont à très peu près dans le rapport des carrés des diamètres de l'âme et du boulet; mais l'égalité de tension des gaz aux deux extrémités de la colonne fluide, n'a lieu que dans le cas où les masses de la bouche à feu et du projectile sont égales, ou quand celle de la charge est très petite par rapport aux deux premières. En désignant par B et par v_1 la masse et la vitesse du boulet, et par c' et c'' les calibres respectifs de l'âme et du projectile, on a alors

$$\mu = Bv_1 \frac{c'^2}{c''^2}.$$

Dans la pratique, le poids de la charge est souvent une fraction notable de celui du projectile; il faut alors tenir compte de la masse du gaz de la poudre, dont une partie est lancée avec le boulet, tandis que l'autre est lancée en sens con-

traire. Mais comme la masse de la bouche à feu, ajoutée à celle de l'affût, est toujours très grande par rapport à celle du projectile (environ dans le rapport de 300 à 1 pour les canons), le fond de l'âme de la pièce ne prend qu'une très faible vitesse, et la portion de gaz qui est lancée en arrière avec lui ne forme qu'une très faible partie de la masse de la charge, dont la presque totalité est lancée en avant avec le projectile. Si toutes les tranches de gaz étaient sensiblement de même densité, ainsi que cela a lieu pour les petites charges, le centre de gravité de la colonne de gaz lancé avec le boulet serait toujours situé au milieu de la longueur de cette colonne, et sa vitesse serait moitié de celle du projectile; mais les tranches les plus rapprochées de ce dernier sont les moins denses, de sorte que le centre de gravité du gaz se meut avec une vitesse plus faible que la moitié de celle du boulet. Mais le rapport qui existe entre ces deux vitesses ne diffère de $\frac{1}{2}$ que d'une quantité qui est toujours beaucoup plus petite que $\frac{1}{24}$ du rapport du poids de la charge à celui du projectile; aussi l'erreur qu'on commet en prenant la moitié de la vitesse du boulet pour celle du gaz peut presque toujours être négligée. En appelant C la masse de la charge, $\frac{Cv_1}{2}$ sera sensiblement la quantité de mouvement communi-

quée au gaz, et l'on aura pour celle du système de la bouche à feu et de l'affût,

$$\mu = Bv_1 \frac{c'^2}{c''^2} + C \frac{v_1}{2}.$$

Dans cette relation entre la quantité de mouvement de la pièce, celle du projectile et celle de la charge, le gaz de la poudre est supposé agir pendant le même temps sur le fond de l'âme et sur le boulet; c'est aussi ce qui a lieu tant que celui-ci n'est pas arrivé à la bouche du canon; mais à partir de ce moment, le fluide élastique n'étant plus contenu par les parois de l'âme, se répand dans l'air et abandonne bientôt le projectile, tandis que dans la direction opposée, non-seulement il continue à agir sur le fond de l'âme, mais la tranche de la bouche du canon est aussi soumise à son action. Pour avoir la quantité totale de mouvement communiquée à la pièce, il faut donc tenir compte de celle que le gaz acquiert en s'écoulant de l'âme, après que son action contre le boulet a cessé. L'accroissement de vitesse du centre de gravité du gaz, après la sortie du projectile hors de la bouche à feu, varie sans doute avec les dimensions de l'âme, la grandeur de la lumière et du vent, le poids de la charge, celui du boulet, et la rapidité avec laquelle le gaz se dégage dans la déflagration de la poudre; cependant la supposition d'un accroissement de vitesse

de la charge de 420 mètres s'accorde assez bien avec les résultats obtenus dans les diverses circonstances du tir des fusils et des canons en usage. Par suite la quantité de mouvement communiquée au système de la bouche à feu et de l'affût devient, en prenant le mètre pour unité de mesure,

$$\mu = \mathrm{B}v_1 \frac{c'^2}{c''^2} + \mathrm{C}\frac{v_1}{2} + 420.\mathrm{C}.$$

Cette relation peut servir aussi à déterminer la vitesse initiale d'un projectile, lorsqu'on connaît la quantité de mouvement de la bouche à feu, car on en tire

$$v_1 = \frac{\mu - 420\,\mathrm{C}}{\mathrm{B}\frac{c'^2}{c''^2} + \frac{\mathrm{C}}{2}}.$$

NOTE DEUXIÈME.

Dans la pratique la valeur de v est plus grande que la vitesse du projectile à la bouche du canon, diminuée dans le rapport de sa masse à celle du

système entier; elle se déduit de l'équation

$$\mu = M\nu = \mu = B\nu_1 \frac{c'^2}{c''^2} + C\frac{\nu_1}{2} + 420\, C;$$

d'où l'on tire

$$\nu = \frac{B}{M}\,\nu_1\,\frac{c'^2}{c''^2} + \frac{C}{M}\left(\frac{\nu_1}{2} + 420\right).$$

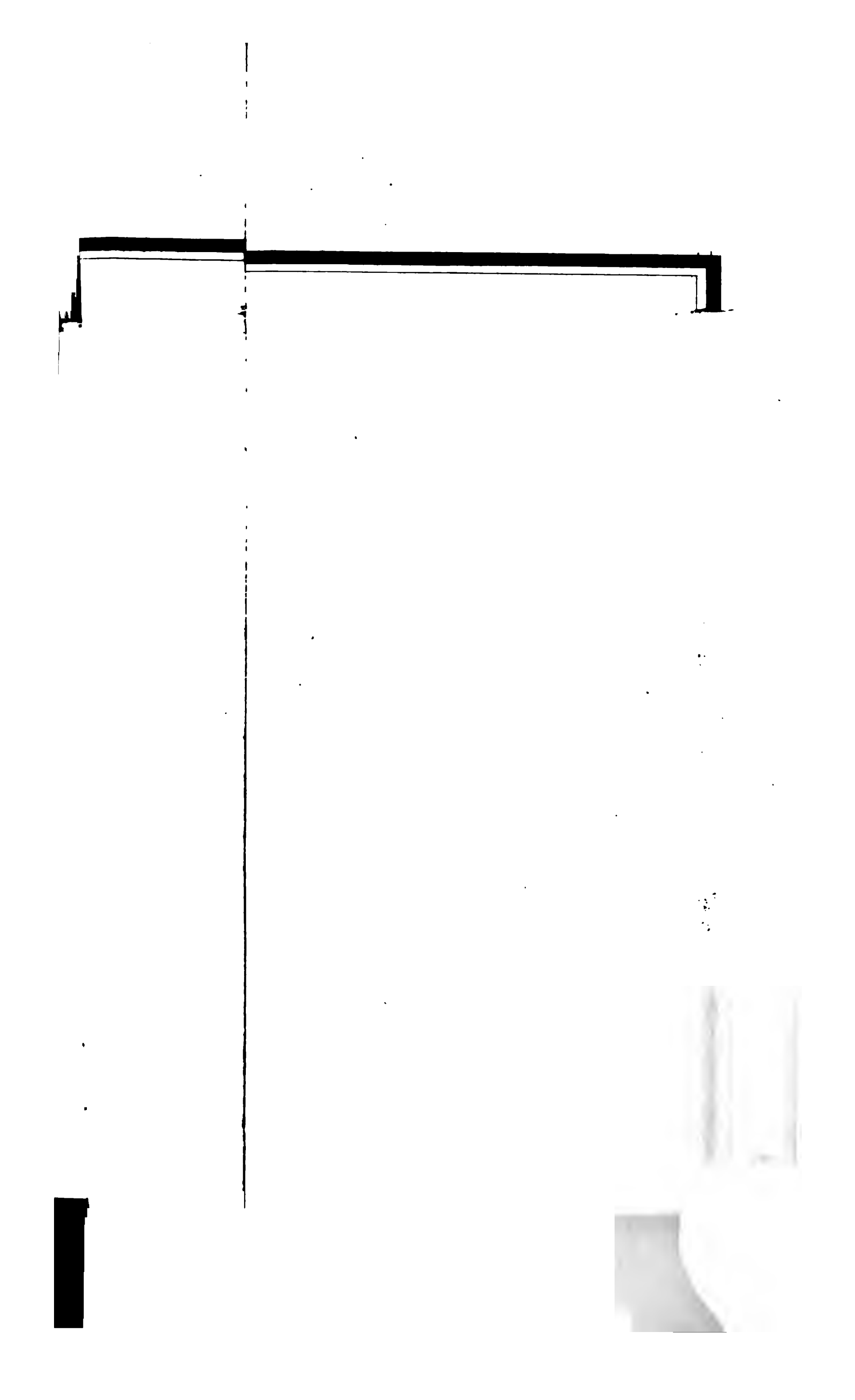
FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Numér

Numéros.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.



EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE

DES

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

DES COURBES.

Par CH. RUCHONNET,
Licencé ès sciences mathématiques à l'Université de France,
Professeur agrégé à l'École polytechnique suisse.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, LIBRAIRE-ÉDITEUR
du Bureau des Longitudes, de l'Ecole impériale polytechnique.
Successeur de MALLET-BACHELIER.
Quai des Augustins, 55.

LONDRES,
WILLIAMS ET NORGATE.

ZURICH,
ORELL, FUSSLI ET COMP.

1864.

ZURICH,

IMPRIMERIE ORELL, FUSSLI & COMP.

PRÉFACE.

» Gardons nous de croire, a dit Poinsot, qu'une science soit faite quand on l'a réduite à des formules analytiques. Rien ne nous dispense d'étudier les choses en elles mêmes, et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations. N'oublions point que les résultats de nos calculs ont presque toujours besoin d'être vérifiés d'un autre côté, par quelque raisonnement simple, ou par l'expérience. Que si le calcul seul peut quelquefois nous offrir une vérité nouvelle, il ne faut pas croire que sur ce point même l'esprit n'ait plus rien à faire; mais, au contraire, il faut songer que, cette vérité étant indépendante des méthodes ou des artifices qui ont pu nous y conduire, il existe certainement quelque démonstration simple qui pourrait la porter à l'évidence, ce qui doit être le grand objet et le dernier résultat de la science mathématique. «

Les remarquables paroles qu'on vient de lire indiquent l'esprit dans lequel cet ouvrage a été composé. Les propriétés générales des courbes y sont établies par des raisonnements simples, faits sur des figures, et qui n'exigent, pour être suivis, que la connaissance des premiers éléments de la science mathématique, en y comprenant les deux ou trois théorèmes fondamentaux sur lesquels repose l'emploi des infiniment petits.

Le présent travail a été entrepris à l'occasion d'un cours que j'ai fait à l'école polytechnique suisse pendant le sémestre qui va finir. Ce cours avait pour objet d'initier les auditeurs à l'esprit de la méthode infinitésimale, et l'ouvrage que j'offre aujourd'hui au public en a constitué une partie.

Je sais combien il est encore imparfait et incomplet; aussi l'aurais-je pour le moment laissé en portefeuille si une circonstance n'était survenue qui m'a décidé à le mettre au jour. Dans le grand et tout récent traité de calcul différentiel de M. Bertrand, je trouve trois des démonstrations que j'avais composées pour mon cours; ce sont celles qu'on lira aux n°s 6, 12 et 31. Comme ce genre de recherches m'a plu, et que je me propose de les continuer quand j'en aurai le loisir, j'ai voulu m'assurer la propriété de ce qui était déjà fait.

Les démonstrations contenues dans les n°s 3, 4, 24, 29, 32, 35, 47, 54, et celles des deux premiers lemmes du n° 8 appartiennent au domaine public. J'ai puisé dans le traité de calcul différentiel de l'abbé Moigno l'idée de la démonstration du n° 52, et dans le récent ouvrage de M. Bertrand l'idée de celle du n° 58. La démonstration du n° 28 a été empruntée aux Nouvelles Annales de Mathématiques, celle du n° 49 à M. Paul Serret, et celle du n° 70 à M. Duhamel. J'ai composé les autres. Quant à la manière dont est présentée au n° 30 la notion du plan osculateur, je l'ai recueillie de la bouche même de M. Bertrand, alors que j'étudiais à Paris.

Zurich, 1er Août 1864.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES.

PREMIÈRE PARTIE.

DES COURBES PLANES.

1. Nous admettons comme évidente la proposition que voici : *Une ligne convexe, c'est-à-dire qui ne peut être coupée par une droite en plus de deux points, étant enveloppée par une autre ligne de telle façon que les extrémités des deux lignes soient toutes sur une même droite, la ligne enveloppée est plus courte que l'enveloppante.*

2. *Définition de la tangente.* Qu'on fasse passer une droite par deux points M et M' d'une courbe ; si l'on suppose M fixe et M' infiniment voisin de M, c'est-à-dire se rapprochant de M et finissant par se confondre avec lui, la droite tournera autour de M et tendra vers une certaine position limite. *C'est cette position limite qu'on appelle la tangente à la courbe au point M.*

Il résulte de cette définition que l'angle que fait la tangente en un point d'une courbe avec la corde d'un arc infiniment petit dont ce point est une des extrémités, est un angle infiniment petit.

3. *La longueur d'un arc de courbe infiniment petit et celle de sa corde sont deux infiniment petits égaux, c'est-à-dire dont la différence est infiniment petite par rapport à chacun d'eux.*

Soient M, M' (fig. 1) les extrémités de l'arc considéré; la proposition sera démontrée si l'on fait voir que, M, tendant vers M, on a:

$$\lim \frac{\text{arc } MM'}{\text{corde } MM'} = 1.$$

Soit L le point de rencontre des tangentes à la courbe en M et en M'; nous allons montrer que le rapport $\frac{ML + M'L}{\text{corde } MM'}$ tend vers l'unité. La proposition énoncée résultera de là, car d'un côté $\frac{\text{arc } MM'}{\text{corde } MM'}$ est toujours plus grand que l'unité, et de l'autre il finit toujours par être et rester plus petit que $\frac{ML + M'L}{\text{corde } MM'}$, puisque l'arc MM' étant infiniment petit finit toujours par être convexe et par suite plus petit que la ligne brisée MLM' qui l'enveloppe (1).

Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de L sur MM'. Le rapport $\frac{ML + M'L}{\text{corde } MM'}$ étant égal à $\frac{ML + M'L}{MP + M'P}$, il est, en vertu d'une proposition élémentaire d'arithmétique, compris entre les rapports $\frac{ML}{MP}$, $\frac{M'L}{M'P}$; mais ceux-ci tendent vers l'unité, car ils sont respectivement égaux à $\frac{1}{\cos LMP}$, $\frac{1}{\cos LM'P}$, et les angles LMP, $LM'P$ tendent vers zéro (2). Le rapport $\frac{ML + M'L}{\text{corde } MM'}$ est donc compris entre deux quantités qui tendent vers l'unité, par conséquent il tend lui-même vers l'unité, ce qu'on voulait démontrer.

Il est donc établi que la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est infiniment petite par rapport à chacun d'eux. Nous ferons connaître plus loin l'ordre de grandeur et l'expression de cette différence.

4. *L'angle que font entre elles les tangentes en deux points d'une courbe infiniment voisins, est, en général, du même ordre que l'arc compris entre ces points.*

Traçons dans le plan de la courbe une droite quelconque que nous nommerons A (fig. 2), et marquons sur la courbe un point que nous désignerons par B. L'angle que fait avec la droite A la tangente en un point M de la courbe est une fonction de la longueur de l'arc BM. Le rapport des accroissements simultanés et infiniment petits que reçoivent ces deux quantités quand on passe du point M à un point infiniment voisin M' tend donc en général vers une limite finie. Or l'angle que font entre elles les tangentes en M et en M' est égal à l'accroissement de l'angle que fait la tangente à la courbe avec la droite A quand on passe de M à M', et la longueur de l'arc MM' est l'accroissement que reçoit alors l'arc compté à partir du point B. De là résulte la proposition.

On peut la démontrer directement comme suit: Entre deux points H et K de la courbe considérée marquons une suite de points $a, b, c, \ldots$ que nous supposerons ensuite augmenter en nombre indéfiniment. Soit α_1 l'angle de la tangente en H avec celle en a, α_2 celui de la tangente en a avec celle en b, etc. Soit s_1 la longueur de l'arc Ha, s_2 celle de l'arc ab, etc. Si les rapports $\frac{\alpha_1}{s_1}, \frac{\alpha_2}{s_2}, \frac{\alpha_3}{s_3}, \ldots$ tendent tous vers zéro ou vers l'infini quand le nombre des points de division croît indéfiniment, le rapport $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots}{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots}$ tend aussi vers zéro ou vers l'infini. Mais la somme $s_1 + s_2 + s_3 \ldots$ est égale à l'arc HK, et la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots$ est égale à l'angle des tangentes en H et en K si toutefois l'arc HK est convexe, condition qu'on peut toujours réaliser en le prenant assez petit. Le

rapport en question est donc fini, c'est-à-dire différent de zéro et de l'infini, et il est même constant. Les rapports $\frac{\alpha_1}{s_1}$, $\frac{\alpha_2}{s_2}$, $\frac{\alpha_3}{s_3}$, ... ne peuvent donc pas tous tendre vers zéro ou vers l'infini. Comme cette conséquence a lieu quelque petit que soit l'arc *HK*, ce n'est qu'en des points isolés que le rapport de l'angle des tangentes en deux points infiniment voisins à l'arc compris entre ces points peut tendre vers zéro ou vers l'infini. En d'autres termes, cet angle est, en général, du même ordre que l'arc.

Il convient de remarquer que cette seconde démonstration n'est que la répétition sur un cas particulier du raisonnement par lequel on établit le théorème général que nous avons invoqué dans la première démonstration, théorème qui consiste en ce que le rapport des accroissements simultanés et infiniment petits de deux grandeurs fonctions l'une de l'autre est une quantité finie. A l'avenir, dans les cas analogues, nous nous bornerons à rappeler ce théorème.

L'angle que forment entre elles les tangentes aux deux extrémités d'un arc infiniment petit a reçu le nom d'*angle de contingence*; nous le désignerons habituellement par la lettre grecque ε.

5. *Définition de la courbure, du cercle, du rayon et du centre de courbure.* L'angle que font entre elles les tangentes aux deux extrémités d'un arc convexe exprime la quantité dont la courbe a dévié de la ligne droite dans l'étendue de cet arc; mais c'est bien moins cette quantité elle même que son rapport à la longueur de l'arc qu'il peut être utile de connaître, car c'est ce rapport qui donne une idée de l'intensité de la courbure de l'arc considéré.

Si la courbe est un cercle, ce rapport est constant, c'est-à-dire indépendant de la longueur de l'arc. Il est égal à la réciproque du rayon, et constitue ce qu'on appelle la *cour-*

bure du cercle. Dans toute autre courbe il est variable, et pour un arc donné il constitue ce qu'on pourrait appeler *sa courbure moyenne.* Supposons l'arc infiniment petit; le rapport que nous considérons tendra vers une limite que nous savons être en général finie (4), et si nous désignons par M celle des deux extrémités de l'arc qui est fixe, cette limite est ce qu'on appelle *la courbure de la courbe considérée au point* M.

Le cercle dont la courbure est égale à cette limite est appelé *le cercle de courbure au point* M; son rayon est *le rayon de courbure.* Si on place ce cercle tangentiellement à la courbe au point M de façon que les concavités de la courbe et du cercle soient tournées du même côté, son centre est *le centre de courbure au point* M.

Il résulte de la définition du rayon de courbure qu'il est la réciproque de la courbure, et, par conséquent, *qu'il est égal à la limite du rapport d'un arc infiniment petit commençant au point* M *à l'angle des tangentes en ses extrémités.*

De tous les cercles tangents à une courbe en un point donné, le cercle de courbure est celui qui s'en rapproche le plus dans les environs de ce point. On peut dès à présent prévoir ce fait, et nous en aurons plus tard la démonstration.

6. *Le centre de courbure en un point* M *d'une courbe est la limite du point de rencontre des normales en* M *et en un point* M' *infiniment voisin.*

Soit O (fig. 3) le point de rencontre des normales en M et en M'; la proposition sera démontrée si l'on établit que la limite de la longueur MO est le rayon de courbure au point M, c'est-à-dire, en désignant par ε l'angle des tangentes en M et en M, que l'on a

$$\lim MO = \lim \frac{\text{arc } MM'}{\varepsilon}.$$

Les tangentes étant perpendiculaires aux normales, l'angle désigné par ε est égal à l'angle des normales, c'est-à-dire à l'angle O. La question est donc ramenée à démontrer qu'on a

$$(a) \qquad lim\ MO = lim\ \frac{arc\ MM'}{angle\ O}.$$

De O comme centre avec OM comme rayon décrivons un cercle, et soit P le point où il coupe la normale $M'O$. On a

$$MO = \frac{arc\ MP}{angle\ O},$$

et, par conséquent,

$$lim\ MO = lim\ \frac{arc\ MP}{angle\ O}.$$

En vertu de cette égalité, pour que l'égalité (a) que nous avons en vue de démontrer soit vraie, il faut et il suffit que les arcs MM' et MP soient des infiniment petits égaux; tout revient donc à démontrer qu'on a

$$lim\ \frac{arc\ MM'}{arc\ MP} = 1.$$

Un arc infiniment petit et sa corde étant deux infiniment petits égaux (3), on n'altèrera pas la limite du rapport $\frac{arc\ MM'}{arc\ MP}$ si l'on y remplace les arcs par leurs cordes, et la proposition se trouvera démontrée si l'on fait voir qu'on a

$$\lim \frac{corde\ MM'}{corde\ MP} = 1.$$

Or cela est évident, car le triangle $MM'P$ donne

$$\frac{corde\ MM'}{corde\ MP} = \frac{sin\ P}{sin\ M'},$$

et comme les angles M' et P sont droits à la limite, la limite du rapport $\frac{sin\ P}{sin\ M'}$ est l'unité.

Le lieu des centres de courbure en tous les points d'une courbe est une courbe remarquable dont nous allons étudier les propriétés. On la nomme *la développée*, et nous verrons tout à l'heure la raison de cette dénomination.

7. *Les rayons de courbure sont tangents à la développée.*

Soient M et M' (fig. 4) deux points infiniment voisins pris sur la courbe donnée, C et C' les centres de courbure qui leur correspondent; il sera démontré que le rayon de courbure MC est tangent en C à la développée si l'on prouve que l'angle qu'il fait avec CC' est infiniment petit. Soit O le point de rencontre de MC et de $M'C'$, la question est ramenée à démontrer que l'angle C du triangle OCC' est infiniment petit.

L'arc CC' de la développée est du même ordre infinitésimal que l'arc MM', car la longueur de la développée et celle de la courbe primitive, comptées sur chacune de ces courbes à partir d'un de ses points, sont deux variables fonctions l'une de l'autre, d'où il résulte que leurs accroissements simultanés et infiniment petits sont en général du même ordre. L'angle MOM' est aussi du même ordre que l'arc MM', puisqu'il est égal à l'angle des tangentes en M et en M'. Il suit de là que dans le triangle OCC' le rapport $\frac{CC'}{\sin O}$ tend vers une limite finie Par conséquent, le rapport $\frac{OC'}{\sin C}$ tend aussi vers une limite finie, puisqu'il est égal à $\frac{CC'}{\sin O}$. Mais OC' est infiniment petit, car O est infiniment voisin de C et de C' (6). Donc l'angle C est infiniment petit, ce qui démontre la proposition.

8. Avant de passer à la seconde propriété des développées nous établirons quelques lemmes.

I. Menons la tangente en un point M (fig. 5) d'une courbe, et par un point M' infiniment voisin tirons une droite qui coupe la tangente en un point Q. Nous ne supposons pas la direction $M'Q$ invariable, mais seulement que l'angle qu'elle fait avec la tangente en M tende vers une limite finie, c'est-à-dire différente de zéro et de deux droits. Nous voulons établir qu'alors $M'Q$ est infiniment petit par rapport à l'arc MM', et que les longueurs *arc* MM' et MQ sont des infiniment petits ègaux Puisque l'arc MM' et sa corde sont des infiniment petits égaux, on pourra dans la démonstration substituer la corde à l'arc.

Le triangle $MM'Q$ donne

$$\frac{M'Q}{MM'} = \frac{\sin M}{\sin Q};$$

or l'angle M tendant vers zéro et l'angle Q vers une limite finie, le rapport $\frac{\sin M}{\sin Q}$ tend vers zéro, et par suite aussi $\frac{M'Q}{MM'}$. Donc $M'Q$ est infiniment petit par rapport à l'arc MM'.

Il résulte immédiatement de là que MM' et MQ sont des infiniments petits égaux, puisque, formant deux côtés du triangle $MM'Q$, leur différence est plus petite que $M'Q$, qui forme le troisième.

II. Soit une seconde courbe tangente à la première en M, et soit M'_1 (fig. 6) le point où elle est rencontrée par la droite $M'Q$. L'angle en Q tendant vers une limite finie, la longueur $M'M'_1$ est infiniment petite par rapport à MQ ou à l'un des arcs MM', MM'_1, puisqu'elle elle est la somme ou la différence de longueurs qui remplissent cette condition.

III. Supposons qu'on sache que *arc* MM' et MQ sont des infiniment petits égaux; alors MQ et *corde* MM' seront aussi des infiniment petits égaux. Si l'on ignore l'ordre de la différence entre MQ et *corde* MM', on ne peut pas affirmer que les angles Q et M' du triangle $MM'Q$ sont finis à la

limite, mais on peut prouver que $M'Q$ est infiniment petit par rapport à *arc* MM'. Il suffit de montrer qu'il l'est par rapport à MQ ou à *corde* MM'. Nous pouvons dans la démonstration écarter le cas où les angles en Q et en M seraient finis à la limite, car alors la proposition résulterait immédiatement de l'égalité

$$\frac{M'Q}{MM'} = \frac{\sin M}{\sin Q};$$

supposons donc qu'ils tendent, l'un vers zéro, l'autre vers deux droits, et pour fixer les idées, soit M' celui qui tend vers zéro.

Alors, MQ étant le plus grand des côtés du triangle, on a

$$MQ = MM'\cos M + QM'\cos Q,$$

d'où

$$MQ - MM'\cos M = QM'\cos Q.$$

Maintenant MM' et $MM'\cos M$ sont des infiniments petits égaux; cela résulte de ce que $\cos M$ tend vers l'unité; donc, puisque MQ et MM' sont égaux en tant qu'infiniment petits, il en est de même de MQ et $MM'\cos M$. Il résulte de là et de la dernière égalité que $QM'\cos Q$ est infiniment petit par rapport à MQ. Mais $\cos Q$ tendant d'après l'hypothèse vers l'unité, QM' et $QM'\cos Q$ sont des infiniment petits égaux; donc, $QM'\cos Q$ étant infiniment petit par rapport à MQ, QM' l'est aussi, ce qu'on voulait démontrer.

Ces lemmes établis, nous retournons à la développée.

9. ***Si sur la développée on fait rouler sa tangente, cette droite, qui dans son mouvement reste toujours normale à la courbe primitive, est toujours traversée par elle au même point.***

Considérons deux points infiniment voisins M et M' de la courbe primitive. Nous ferons voir premièrement que si la tangente à la développée, d'abord normale en M, roule jusqu'à devenir normale en M', le point M, considéré comme

appartenant à la tangente et comme entraîné dans son mouvement, se trouve alors à une distance de M' infiniment petite par rapport à l'arc MM'. Nous regarderons cet arc comme du premier ordre.

Soient C et C' (fig. 7) les points où les normales à la courbe en M et en M' touchent la développée, et soit O leur point de rencontre. Prenons, sur la normale en M, CQ égal à l'arc CC' de la développée ; Q est le point de cette normale qui s'appliquera sur C' lorsqu'elle sera arrivée en M'. Nous savons (8. III) que $C'Q$ est d'un ordre supérieur à celui de l'arc CC', et comme l'arc CC' est du même ordre que l'arc MM', ainsi que nous l'avons déjà fait observer (7), $C'Q$ est d'un ordre supérieur à celui de MM', c'est-à-dire d'un ordre supérieur au premier.

Cela posé, nous allons faire exécuter à la normale en M deux mouvements consécutifs dont l'ensemble équivaudra au roulement de cette normale sur la développée. Nous voulons dire par là que, ces deux mouvements accomplis, chaque point de cette normale occupera exactement la même position que si elle était venue coïncider avec la normale en M' en roulant sur la développée. Le premier de ces mouvements sera un mouvement de rotation autour de l'intersection O, qui amènera la normale en M à s'appliquer sur celle en M'. Le second sera un mouvement de translation qui amènera le point Q, actuellement situé sur la normale en M', à coïncider avec le point C', et en vertu duquel tous les points de la normale en M, qui actuellement coïncide avec celle en M', décriront des droites égales et parallèles.

Examinons l'effet de chacun de ces mouvements sur le point M, considéré comme appartenant à la normale en M.

Le premier mouvement fait décrire au point M un arc de cercle tangent à la courbe primitive au point de départ, d'où il suit qu'en vertu de ce mouvement le point M vient

occuper une position qui est distante de M' d'une longueur dont l'ordre surpasse celui de l'arc MM' (8. II).

Le second mouvement est destiné à amener le point Q en C', mais il faut avant tout rechercher quelle influence le premier mouvement a eue sur la position de ce point Q.

L'angle dont la normale en M a tourné étant du même ordre que l'arc MM', c'est-à-dire du premier, et la distance OQ étant infiniment petite, le premier mouvement a fait décrire au point Q un arc de cercle d'un ordre supérieur au premier. Puis donc qu'un arc de cercle et sa corde sont des infiniment petits égaux, ce premier mouvement n'a déplacé le point Q que d'une longueur d'un ordre supérieur au premier. Dès lors, la longueur QC', qui était d'un ordre supérieur au premier avant l'exécution du premier mouvement, est encore d'un ordre supérieur au premier, une fois ce mouvement effectué.

Maintenant le deuxième mouvement ayant pour effet de déplacer tous les points de la normale en M, actuellement appliquée sur celle en M', d'une longueur égale à QC', le point M se trouvera encore, après ce mouvement, à une distance de M' infiniment petite par rapport à l'arc MM' de la courbe primitive.

Comme les deux mouvements que nous avons fait exécuter à la normale en M sont exactement équivalents au roulement sur la développée qui amènerait la normale en M à coïncider avec celle en M, la proposition préliminaire que nous avions en vue se trouve démontrée.

Ce point acquis, la démonstration s'achève facilement. Considérons un arc fini, dont la première extrémité sera désignée par M, et décomposons le en n parties terminées en des points M', M'', M''',...., $M^{(n)}$, ce dernier étant la seconde extrémité de l'arc fini considéré. Nous supposerons ces parties infiniment petites et croissant en nombre indé-

finiment. Concevons maintenant que la normale roule sur la développée à partir de la position où elle coupe la courbe primitive au point M jusqu'à celle où elle la coupe au point $M^{(n)}$, et qu'elle emporte successivement les points M, M', M'',...., $M^{(n-1)}$. Quand elle sera arrivée en M', le point M se trouvera à une distance de M' infiniment petite par rapport à l'arc MM'; quand elle sera arrivée en M'', le point M' se trouvera à une distance de M'' infiniment petite par rapport à l'arc $M'M''$;.. .....; quand elle sera arrivée en $M^{(n)}$, le point $M^{(n-1)}$ se trouvera à une distance de $M^{(n)}$ infiniment petite par rapport à l'arc $M^{(n-1)}M^{(n)}$. Or la distance à laquelle M sera de $M^{(n)}$, lorsque la normale coupera la courbe en ce dernier point, est au plus égale à la somme de toutes ces distances infiniment petites par rapport aux arcs qui leur correspondent sur la courbe primitive; donc cette distance est infiniment petite par rapport à la somme de ces arcs, c'est-à-dire par rapport à l'arc fini considéré $MM^{(n)}$, donc elle est nulle.

Il est ainsi démontré que si l'on fait rouler sa tangente sur la développée, cette droite est toujours coupée par la courbe primitive au même point.

10. Concevons un fil enroulé sur la développée jusqu'à un certain point quelconque à partir duquel il s'en sépare tangentiellement et se prolonge jusqu'au point où il coupe la courbe primitive; qu'ensuite on développe la partie enroulée en tenant toujours le fil tendu: son extrémité sera toujours sur la courbe primitive, et la partie rectiligne sera toujours la longueur même du rayon de courbure au point où elle la touche. Le lieu des centres de courbure d'une courbe peut donc servir à décrire cette courbe par son développement en ligne droite, et c'est de là que lui vient le nom de *développée*.

Il résulte de là qu'*un arc fini de la développée d'une courbe quelconque est égal à la différence des rayons de courbure correspondants aux deux extrémités de cet arc.*

11. On déduit de cette proposition que si le rayon de courbure a la même longueur en tous les points d'un arc, la partie de la développée qui correspond à cet arc se réduit à un point. Donc, *lorsque le rayon de courbure a la même longueur en tous les points d'un arc, cet arc est un arc de cercle.*

12. *Un arc est situé en dehors du cercle de courbure en l'une de ses extrémités, lorsque le rayon de courbure va croissant dans toute son étendue à partir de cette extrémité; il est situé dans l'intérieur de ce cercle, si au cortraire le rayon de courbure va décroissant.*

Soit MN (fig. 8) un arc dans lequel le rayon de courbure va croissant toujours quand on marche de M en N; comme il va décroissant quand on marche de N en M, il suffit, pour que la proposition soit démontrée, de faire voir que le point N est en dehors du cercle de courbure en M, et que le point M est en dedans du cercle de courbure en N.

Soit CD l'arc de la. développée qui correspond à l'arc MN, C etant le centre de courbure au point M, et D celui au point N; on a

$$CN + \text{arc } CD > DN;$$

d'où,

$$CN > DN - \text{arc } CD;$$

et par conséquent, à cause de $DN - \text{arc } CD = CM$,

$$CN > CM.$$

Le point N est donc extérieur au cercle de courbure en M. On a ensuite

$$DM < CM + \text{arc } CD,$$

et, par conséquent, à cause de $CM + \text{arc } CD = DN$,

$$DM < DN.$$

Le point M est donc situé dans l'intérieur du cercle de courbure en N.

Corollaire. Le cercle de courbure traverse en général la courbe au point de contact. En effet, le cercle de courbure en un point quelconque A de l'arc MN comprend dans son intérieur l'arc AM et laisse en dehors de lui l'arc AN.

Pour que le cercle de courbure ne traverse pas la courbe au point de contact, il faut qu'en ce point le rayon de courbure cesse de croître pour commencer à décroître, ou qu'il cesse de décroître pour commencer à croître. Dans le premier cas, la courbe est située dans l'intérieur du cercle de courbure de part et d'autre du point de contact; dans le second cas elle est, de part et d'autre du point de contact, extérieure à ce cercle. Mais de tels points, lorsqu'une courbe en présente, sont nécessairement isolés. On a un exemple des premiers dans les extrémités du petit axe de l'ellipse, et des seconds dans les extrémités du grand axe.

13. *Parmi les cercles tangents à une courbe en un point donné, aucun ne la traverse en ce point, à part le cercle de courbure.*

Soit M le point donné, et C le centre de courbure en ce point; CM est le rayon de courbure. Le rayon d'un cercle tangent à la courbe au point M peut être plus grand ou plus petit que CM. Nous montrerons que dans le premier cas ce cercle est situé, dans le voisinage de M et de part et d'autre de ce point, entre la courbe et la tangente, et que dans le second, c'est au contraire la courbe qui est située, dans le voisinage de M et de part et d'autre de ce point, entre le cercle et la tangente. La proposition énoncée résultera de là. En vertu de la proposition précédente, il suffira dans le premier cas de considérer le côté où le rayon de courbure va croissant à partir de M, et dans le

second de considérer le côté où le rayon de courbure va décroissant.

1er cas. Soit V (fig. 9), situé sur la normale MC au delà de C par rapport à M, le centre du cercle considéré. Nous supposons que le rayon de courbure commence par aller croissant, lorsque, partant de M, on marche dans le sens MX.

Par un point O situé sur la normale entre C et V menons une seconde tangente à la développée. Soit D le point de contact et N le point où elle coupe l'arc MX. Nous allons montrer qu'on a, en supposant O assez voisin de C pour que l'arc CD soit convexe :

$$VN < VM,$$

et, par conséquent, que le point N est situé dans l'intérieur du cercle considéré. Il résultera de là que ce cercle passe entre la tangente et l'arc MN.

Puisque l'arc CD est convexe, on a

$$\text{arc } CD < DO + OC,$$

d'où

$$\text{arc } CD + CM < DO + OM,$$

ou

$$DN < DO + OM,$$

d'où

$$ON < OM.$$

Mais d'un autre côté on a

$$VN < VO + ON,$$

donc, a fortiori

$$VN < VO + OM,$$

ou

$$VN < VM.$$

2^d^ cas. V (fig 10) est maintenant situé sur la normale MC entre M et C, et nous supposons que le rayon de courbure

commence par décroître. Les mêmes lettres désignant les mêmes choses que dans la figure précédente, nous montrerons qu'en supposant *O* assez voisin de *C* pour que l'arc *CD* soit convexe, on a

$$VN > VM,$$

et, par conséquent, que le point *N* est situé en dehors du cercle considéré. Il résultera de là que l'arc *MN* est situé entre le cercle et la tangente.

L'arc *CD* étant convexe, la ligne *CDN*, formée par l'arc *CD* et la partie *DN* de la tangente en *D* l'est aussi ; donc

$$CV + VN > \text{arc } CD + DN,$$

ou

$$CV + VN > CM,$$

d'où

$$VN > VM.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Corollaire. Considérons un point d'une courbe et le cercle de courbure en ce point Il résulte immédiatement de notre théorème qu'il n'est pas possible de tracer un cercle qui, à partir du point considéré, passe entre la courbe et le cercle de courbure.

14. *Le cercle de courbure est la limite du cercle tangent à la courbe au point considéré et passant par un second point de la courbe infiniment voisin.*

Soit *MX* (fig. 11) un arc de la courbe donnée et *M* le point considéré Supposons que le rayon de courbure commence par croître à partir de *M* quand on marche dans le sens *MX*. Soit *MY* un arc du cercle de courbure en *M* situé du même côté de la normale en *M* que l'arc *MX* ; l'arc *MX* est, dans les environs de *M*, situé entre l'arc *MY* et la tangente (12).

Soit *C* le centre de courbure au point *M*, et *V* un point situé sur *MC* au-delà de *C* par rapport à *M* ; le cercle dé-

crit de *V* comme centre avec *VM* comme rayon passe, dans les environs du point *M*, entre l'arc *MX* et la tangente (13), et, par suite, dans le voisinage du point *M*, l'arc *MX* passe entre ce cercle et le cercle de courbure, et cela a lieu quelque petite que soit la distance *CV*.

Si maintenant on suppose que le point *V* se rapproche indéfiniment de *C* de manière à se confondre avec lui à la limite, le cercle dont ce point est le centre se rapprochera indéfiniment du cercle de courbure. Puis donc que ces deux cercles sont, dans le voisinage de *M* et du côté *MX*, situés de part et d'autre de la courbe, il faut que celui dont le centre est *V* la coupe en un point qui aille se rapprochant indéfiniment de *M* lorsque *V* tend vers *C*. De là résulte la proposition.

Si l'on avait supposé que le rayon de courbure commençât par décroître à partir de *M*, on aurait pris le point *V* entre *M* et *C*, et la démonstration eût été la même.

15. *Du cercle osculateur.* De même que l'on considère la limite de la droite qui passe par un point fixe d'une courbe et par un second point infiniment voisin, de même on considère la limite du cercle qui passe par un point fixe d'une courbe et par deux autres qui s'en rapprochent indéfiniment. Ce cercle limite est nommé *cercle osculateur*. Nous allons voir qu'il est identique avec le cercle de courbure

Remarquons à cet effet que la proposition établie au numéro précédent peut être énoncée comme suit: *Le centre de courbure en un point d'une courbe est la limite de l'intersection de la normale en ce point et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde qui le joint à un point infiniment voisin.*

Cela posé, soit *M* (fig. 12) un point pris sur la courbe donnée, *M'* et *M''* deux points de cette courbe infiniment

voisins de M. Soit A l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes MM', $M'M''$; A est le centre du cercle conduit par les points M, M', M'', et il s'agit de démontrer qu'il se confond à la limite avec le centre de courbure au point M.

Menons la normale au point M' et soient F et G les points en lesquels elle est coupée par les perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes MM', $M'M''$. D'après la proposition du numéro précédent, énoncée comme on l'a vu tout à l'heure, les points F et G sont infiniment voisins du centre de courbure au point M', d'où il résulte que la longueur FG est infiniment petite. Mais dans le triangle AFG le côté FG est le plus grand côté, puisque l'angle en A est le plus grand angle; dès lors les côtés AF, AG sont aussi infiniment petits, et par conséquent le point A est, de même que les points F et G, infiniment voisin du centre de courbure au point M'. Or le centre de courbure au point M' est infiniment voisin du centre de courbure au point M; donc A se confond à la limite avec le centre de courbure au point M, et c'est ce qu'on voulait démontrer.

16. *Les angles que font avec la corde d'un arc infiniment petit les tangentes en ses extrémités, sont des infiniment petits égaux.*

Soient M, M' (fig. 1) les deux extrémités de l'arc, et L l'intersection des tangentes en ces extrémités; il s'agit de démontrer que les angles LMM', $LM'M$ sont des infiniment petits égaux.

Concevons qu'on ait tracé le cercle tangent à la courbe au point M et passant par M'; soit R son rayon et a l'arc infiniment petit qu'interceptent sur ce cercle les points M, M'; on a

$$\text{angle } LMM' = \frac{a}{2R}.$$

Concevons encore qu'on ait tracé le cercle tangent à la courbe au point M' et passant par M; soit R' son rayon et a' l'arc infiniment petit qu'interceptent sur ce cercle les points M et M'; on a

$$\text{angle } LM'L = \frac{a'}{2R'}.$$

La question est ainsi ramenée à démontrer que $\frac{a}{2R}$ et $\frac{a'}{2R'}$ sont des infiniment petits égaux, ou, en d'autres termes, à démontrer que le rapport de ces quantités, qui est égal à $\frac{a}{a'} \times \frac{R'}{R}$, a pour limite l'unité.

Le premier cercle diffère infiniment peu du cercle de courbure au point M (14), et le second diffère infiniment peu du cercle de courbure au point M', donc aussi de celui au point M. Par conséquent, le rapport $\frac{R'}{R}$ a pour limite l'unité. Comme il en est de même du rapport $\frac{a}{a'}$, puisque les arcs a et a' ont la même corde, la proposition se trouve démontrée.

Corollaire I. Posons

$$LMM' - LM'M = \omega;$$

d'après la proposition qu'on vient de démontrer, ω est d'un ordre supérieur à celui de nos deux angles. D'un autre côté on a, en désignant, comme nous en sommes déjà convenus, par ε l'angle de contingence:

$$LMM' + LM'M = \varepsilon.$$

De ces deux égalités on tire

$$LMM' = \frac{1}{2}(\varepsilon + \omega),\ LM'M = \frac{1}{2}(\varepsilon + \omega).$$

On a donc la proposition que voici: *L'angle que fait la corde d'un arc infiniment petit avec la tangente en l'une de ses*

extrémités a pour expression $\frac{1}{2}\varepsilon$, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à lui.

Nous verrons plus loin que ω est de l'ordre du carré de l'arc, et nous en donnerons l'expression.

Corollaire II. Le triangle $MM'L$ donne

$$\frac{ML}{M'L} = \frac{\sin LM'M}{\sin LMM'},$$

et comme le second membre tend vers l'unité, il en est de même du premier; ML et $M'L$ sont donc des infiniment petits égaux.

On a démontré (3) que

$$ML + M'L \text{ et } corde\ MM'$$

sont des infiniment petits égaux; il en est a fortiori de même de

$$ML + M'L \text{ et } arc\ MM';$$

si donc on désigne par ω une quantité d'ordre supérieur à celui de l'arc MM', et qu'on désigne, comme nous le ferons dorénavant, cet arc par Δs, on aura

$$ML + M'L = \Delta s + \omega.$$

D'un autre côté, ML et $M'L$ étant des infiniment petits égaux, on a, en désignant par ω' une quantité d'ordre supérieur au leur, et par suite à celui de Δs,

$$ML - M'L = \omega'.$$

De ces deux égalités on tire:

$$ML = \frac{1}{2}(\Delta s + \omega + \omega'),\ M'L = \frac{1}{2}(\Delta s + \omega - \omega'),$$

et comme les quantités $\omega + \omega'$, $\omega - \omega'$ sont d'un ordre supérieur à celui de Δs, on a cette proposition: *La partie de la tangente en une extrémité d'un arc infiniment petit, comprise entre cette extrémité et son intersection avec la tangente en l'autre extrémité, a pour expression $\frac{1}{2}\Delta s$, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à elle-même.*

Nous verrons plus loin que la différence entre cette partie de la tangente et $\frac{1}{2}\Delta s$ est de l'ordre du carré de l'arc, et nous en donnerons l'expression.

17. ***Expression de la perpendiculaire abaissée d'une extrémité d'un arc infiniment petit sur la tangente en l'autre extrémité.***

Soit L (fig. 13) le point de rencontre des tangentes aux extrémités M et M' de l'arc infiniment petit que l'on considère, et P le pied de la perpendiculaire abaissée de M' sur la tangente en M; on a

$$M'P = M'L \sin M'LP = M'L \sin \varepsilon.$$

On n'altèrera le second membre que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui même si l'on remplace $M'L$ et $\sin \varepsilon$ par d'autres infiniment petits qui leur soient respectivement égaux; or $M'L$ et $\frac{1}{2}\Delta s$ sont des infiniment petits égaux (16. Cor. II), et il en est de même de $\sin \varepsilon$ et ε, comme on le démontre en trigonométrie. Substituant $\frac{1}{2}\Delta s$ et ε à $M'L$ et $\sin\varepsilon$, le second nombre devient $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta s$, et l'on a la proposition suivante: ***La perpendiculaire abaissée d'une extrémité d'un arc infiniment petit sur la tangente en l'autre extrémité est égale à la moitié du produit de l'arc par l'angle de contingence, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à elle même.***

Si l'on considère l'arc comme du premier ordre, $M'P$ est du second, puisque ε et Δs sont du même ordre. En d'autres termes, $M'P$ est de l'ordre du carré de l'arc.

Le produit $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta s$ peut s'écrire $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\Delta s}\Delta s^2$; or on ne l'altèrera que d'une quantité infiniment petite par rap-

port à lui même si l'on remplace $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ par sa limite, c'est-à-dire par la réciproque du rayon de courbure au point M. Désignant, comme nous le ferons dorénavant, par ρ le rayon de courbure au point M, on a donc, à un infiniment petit près d'ordre supérieur au second,

$$M'P = \frac{\Delta s^2}{2\rho}.$$

Corollaire I. La distance de M' à la tangente en M comptée suivant une direction quelconque faisant avec cette tangente un angle fini à la limite est aussi du second ordre; en effet, soit $M'Q$ cette distance, on a:

$$\frac{M'Q}{M'P} = \frac{1}{\sin M'QP'},$$

et $\frac{1}{\sin M'QP}$ tend, en vertu de l'hypothèse, vers une limite finie.

Corollaire II. Si la direction $M'Q$ tend à devenir perpendiculaire à la tangente en M, ou, en d'autres termes, si l'angle $PM'Q$ est infiniment petit, non seulement $M'Q$ est du second ordre, mais il a pour expression, de même que $M'P$, $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta s$ et $\frac{\Delta s^2}{2\rho}$, en négligeant une quantité d'ordre supérieur au second. En effet, $M'P$ et $M'Q$ sont, dans l'hypothèse actuelle, des infiniment petits égaux.

18. *Expression de la distance de deux courbes tangentes l'une à l'autre, dans le voisinage du point de contact.*

Soit M (fig. 14) le point de contact, et soient M', M'_1 et Q les points en lesquels les deux courbes et la tangente commune sont coupées par une droite que nous supposerons faire avec cette tangente un angle qui devienne droit à la limite. Désignons par ρ et ρ_1 les rayons de courbure

des deux courbes au point M. On a, en négligeant des quantités infiniment petites par rapport à $M'Q$ et à M'_1Q,

$$M'Q = \frac{\overline{\text{arc } MM'}^2}{2\rho}, \quad M'_1Q = \frac{\overline{\text{arc } MM'_1}^2}{2\rho_1} \text{ (17. Cor. II).}$$

Les trois longueurs *arc* MM', *arc* MM'_1 et MQ sont des infiniment petits égaux; les valeurs précédentes de $M'Q$ et M'_1Q ne seront donc altérées que de quantités infiniment petites par rapport à elles mêmes si l'on y remplace *arc* MM' et *arc* MM'_1 par MQ; on obtient ainsi:

$$M'Q = \frac{\overline{MQ}^2}{2\rho}, \quad M'_1Q = \frac{\overline{MQ}^2}{2\rho_1}.$$

Considérant *arc* MM', *arc* MM'_1 et MQ comme du premier ordre, les quantités négligées sont d'ordre supérieur au second; on a alors, à un infiniment petit près d'ordre supérieur au second:

$$M'M'_1 = M'Q - M'_1Q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\overline{MQ}^2.$$

Lors donc que les deux courbes n'ont pas le même rayon de courbure au point de contact, leur distance, comptée sur une droite qui tend à devenir perpendiculaire à la tangente commune, est du second ordre.

Comptée sur toute droite faisant avec la tangente au point de contact un angle fini à la limite, la distance des deux courbes est encore du second ordre. Soit en effet $M'R$ une telle droite, et m'_1 le point où elle coupe la courbe à laquelle appartient le point M'_1; les longueurs *arc* MM', *arc* Mm'_1 et MR sont encore des infiniment petits égaux, et si l'on tire la corde $M'_1m'_1$, le triangle $M'M'_1m'_1$ donne

$$\frac{M'm'_1}{M'M'_1} = \frac{\sin M'_1}{\sin m'_1};$$

or le second membre tend vers une limite finie, car puisque la direction $M'_1m'_1$ se confond à la limite avec celle de la tangente en M, le numérateur et le dénominateur ont pour limites, le premier l'unité, et le second, $\sin M'RQ$.

Lorsque les deux courbes ont le même rayon de courbure au point de contact, la quantité $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\overline{MQ}^2$ s'évanouit, et par suite leur distance est d'un ordre supérieur au second.

Soit MX (fig 15) la courbe considérée, MY son cercle de courbure au point M, et MZ un autre cercle tangent à la courbe en ce même point. Soient M'_1 et M'_2 les points où une droite tirée d'un point M' infiniment voisin de M et pris sur la courbe donnée coupe les cercles MY, MZ. En vertu de ce qui précède, $M'M'_2$ est du second ordre et $M'M'_1$ est d'un ordre supérieur. Par conséquent, *la distance d'une courbe au cercle de courbure en un de ses points est infiniment petite par rapport à sa distance à tout autre cercle qui lui est tangent en ce point*.

Nous verrons prochainement que la distance de la courbe au cercle de courbure est du troisième ordre, et nous en donnerons l'expression.

19. *Expression de la différence entre un arc infiniment petit et sa corde.*

On établit dans les éléments de trigonométrie l'égalité suivante, où α désigne un angle quelconque

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2\ldots5} - \frac{\alpha^7}{1.2\ldots7} + \ldots\ldots$$

On en déduit que toutes les fois que α est plus petit que l'unité, $\sin \alpha$ est compris entre

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} \quad \text{et} \quad \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2\ldots5},$$

et par suite que la différence $\alpha - \sin\alpha$ est comprise entre

$$\frac{\alpha^3}{1.2.3} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha^3}{1.2.3} - \frac{\alpha^5}{1.2\ldots5}.$$

Si donc α est infiniment petit, la différence $\alpha - \sin\alpha$ est égale à $\frac{\alpha^3}{1.2.3}$ ou $\frac{\alpha^3}{6}$ à un infiniment petit du cinquième ordre près, α étant considéré comme du premier ordre.

Soit maintenant s un arc de cercle infiniment petit, c sa corde, R le rayon du cercle. Si l'on appelle α la moitié de l'angle au centre qui comprend cet arc, on aura

$$s = 2R\alpha, \qquad c = 2R\sin\alpha, \qquad \alpha = \frac{s}{2R};$$

donc, si l'on multiplie $\alpha - \sin\alpha$ et $\frac{\alpha^3}{6}$ par $2R$, on aura à un infiniment petit du cinquième ordre près, s étant considéré comme du premier ordre:

$$s - c = \frac{s^3}{24R^2}.$$

Nous allons étendre cette formule à toutes les courbes planes.

Soit M un point d'une courbe quelconque et M' un point infiniment voisin. Décrivons deux cercles, le premier tangent à la courbe en M et passant par M', le second tangent à la courbe en M' et passant par M. L'arc MM' de la courbe considérée est compris entre les arcs MM' des deux cercles.

Pour le démontrer, remarquons que l'arc MM' étant infiniment petit, on peut le supposer dès l'abord assez petit pour que le rayon de courbure aille toujours croissant ou toujours décroissant quand on marche de M vers M'. Pour fixer les idées supposons qu'il aille croissant.

Le rayon de courbure croissant toujours de M en M', le cercle de courbure au point M passe, en vertu de la proposition du n° 12, au dessous de l'arc MM'. Il résulte de là que le rayon du cercle qui est tangent à la courbe en M et qui passe par M' est plus grand que le rayon de courbure au point M. Dès lors, en vertu de ce qui a été démontré au n° 13, 1er cas, l'arc MM' de la courbe considérée est situé à l'intérieur de ce cercle

En se fondant sur ce que le rayon de courbure va décroissant quand on marche de M' vers M, on démontrera semblablement que l'arc MM' est situé à l'extérieur du cercle tangent à la courbe en M' et passant par M.

Notre proposition préliminaire se trouve ainsi démontrée; il en résulte que si l'on désigne par Δs la longueur de l'arc MM' de la courbe, puis par S et S_1 celles des arcs MM' des deux cercles, on a

$$S > \Delta s > S_1,$$

et par suite, en appelant c la corde commune,

$$S - c > \Delta s - c > S_1 - c.$$

Appelons R et R_1 les rayons des deux cercles, ρ le rayon de courbure de la courbe donnée au point M, et considérons les trois quantités

$$\frac{S^3}{24R^2}, \quad \frac{\Delta s}{24\rho^2}, \quad \frac{S^3_1}{24R^2_1};$$

on reconnait aisément que ce sont des infiniment petits égaux, car le rapport de deux qnelconques des trois arcs S, Δs, S_1 tend vers l'unité, et il en est de même du rapport des trois rayons R, ρ, R_1.

Or d'apres ce qu'on a vu plus haut, les quantités

$$S - c \text{ et } \frac{S^3}{24R^2} \text{ d'un côté,}$$

$$S_1 - c \text{ et } \frac{S^3_1}{24R^2_1} \text{ de l'autre}$$

sont des infiniment petits égaux ; il suit de là, et de ce que $\Delta s - c$ est compris entre $S - c$ et $S_1 - c$, que les trois différences

$$S - c,\ \Delta s - c,\ S_1 - c$$

et les trois rapports

$$\frac{S^3}{24R^2},\ \frac{\Delta s}{24\rho^2},\ \frac{S^3_1}{24R_1^2}$$

constituent six infiniment petits égaux ; en d'autres termes, deux quelconques de ces six quantités ne diffèrent que d'un infiniment petit d'ordre supérieur au troisième. On a donc, à ce degré d'approximation,

$$\Delta s - c = \frac{\Delta s^3}{24\rho^2}.$$

On peut exprimer autrement la différence $\Delta s - c$; le facteur $\frac{1}{\rho}$ étant la limite du rapport $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$, il n'en diffère que d'une quantité infiniment petite. Si donc dans la valeur précédente de $\Delta s - c$ on remplace $\frac{1}{\rho}$ par $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$, cette valeur ne sera altérée que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle même. Par cette substitution elle devient $\frac{1}{24}\varepsilon^2\Delta s$. Donc, *la différence entre un arc infiniment petit du premier ordre et sa corde est du troisième ordre ; elle est égale, en négligeant une quantité d'ordre supérieur au troisième, à la vingt quatrième partie du produit de l'arc par le carré de l'angle de contingence.*

Nous verrons plus loin que cette proposition est vraie aussi des courbes gauches.

Remarque. Si l'on voulait seulement démontrer que l'ordre de grandeur de la différence entre un arc infiniment petit et sa corde n'est pas inférieur au troisième, on pourrait arriver au but plus promptement que par les raisonnements

qui précèdent. Soit en effet L (fig. 1) le point de rencontre des tangentes aux extrémités M, M' de l'arc, et P le pied de la perpendiculaire abaissée de L sur la corde MM'; on a

$$\begin{aligned} ML + M'L - \text{corde} MM' &= ML - MP + M'L - M'P \\ &= ML\,(1-\cos LMM') + M'L\,(1-\cos LM'M) \\ &= 2ML\sin^2\frac{1}{2}LMM' + 2M'L\sin^2\frac{1}{2}LM'M, \end{aligned}$$

d'où il résulte que la différence entre la ligne brisée MLM' et la corde MM' est du troisième ordre, puisque ML et $M'L$ sont du premier ordre, ainsi que les angles LMM', $LM'M$. De là résulte la proposition, car cette différence est plus grande que celle qui existe entre l'arc MM' et sa corde.

20. *Expression de la distance de la courbe au cercle de courbure dans le voisinage du point de contact.*

Soit MX (fig. 16) la courbe considérée, M le point de contact, M' un point infiniment voisin. Supposons que le rayon de courbure aille croissant de M vers M', et soient C et C' les centres de courbure relatifs à ces deux points. Considérant l'arc MM' comme du premier ordre, l'arc CC' de la développée est aussi du premier ordre. Soit MY le cercle de courbure au point M, et M'_1 le point où il est coupé par le rayon de courbure $C'M'$. Nous nous proposons de chercher l'expression de la longueur $M'M'_1$.

Tirons CM'_1; on a

$$C'M = \text{arc } CC' + CM = \text{arc } CC' + CM'_1,$$

d'où

$$M'M'_1 = \text{arc } CC' + CM'_1 - C'M'_1,$$

ce qu'on peut écrire

$$M'M'_1 = \text{corde } CC' + CM'_1 - C'M'_1 + \text{arc } CC' - \text{corde } CC',$$

ou, en désignant par P le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur $C'M'$:

$$M'M'_1 = (\text{corde } CC' - C'P) + (CM'_1 - M'_1P) + (\text{arc } CC' - \text{corde } CC').$$

La longueur considérée se trouve ainsi mise sous la forme d'une somme de trois différences. Nous allons examiner ces différences successivement et en rechercher les expressions, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au troisième.

On a

$$corde\ CC' - C'P = corde\ CC'\ (1 - \cos CC'P)$$

$$= 2\ corde\ CC' \sin^2 \frac{1}{2} CC'P,$$

quantité du troisième ordre, car la corde CC' et l'angle $CC'P$ sont du premier. On ne l'altèrera que d'une quantité d'un ordre supérieur si l'on en remplace les facteurs par des infiniment petits qui leur soient respectivement égaux. D'abord on peut remplacer le facteur *corde* CC' par l'accroissement que reçoit le rayon de courbure quand on passe de M à M', accroissement que nous désignerons par $\Delta\rho$. Cela tient à ce que cet accroissement est précisément égal à l'arc CC' (10), et que l'arc CC' et sa corde sont des infiniment petits égaux. En second lieu, le facteur $\sin \frac{1}{2} CC'P$ pourra être remplacé par $\frac{1}{2} CC'P$, et comme $CC'P$ est l'angle que fait la corde CC' avec la tangente au point C', on peut lui substituer la moitié de l'angle des tangentes en C et C' (16. Cor. I); mais cet angle est égal à celui des tangentes en M et en M', c'est-à-dire à ε; on pourra donc, au lieu de $CC'P$, écrire $\frac{1}{2}\varepsilon$. Par l'effet de ces substitutions la quantité 2 *corde* $CC' \sin^2 \frac{1}{2} CC'P$ devient $\frac{1}{8}\varepsilon^2 \Delta\rho$; on a donc, en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur au troisième,

$$corde CC' - C'P = \frac{1}{8}\varepsilon^2 \Delta\rho.$$

Passons à la deuxième différence, on a :

$$CM'_1 - M'_1P = CM'_1(1 - \cos CM'_1P)$$
$$= 2CM'_1 \sin^2 \frac{1}{2} CM'_1P.$$

Nous allons montrer que cette quantité est du quatrième ordre, et que la deuxième différence doit, par conséquent, être négligée.

On a :

$$\sin CM'_1P = \frac{CP}{CM'_1};$$

or CP', perpendiculaire abaissée d'une extrémité d'un arc infiniment petit du premier ordre sur la tangente en l'autre extrémité, est une longueur du second ordre (17), et comme CM'_1 est fini, $\sin CM'_1P$ est du second ordre. Par suite $\sin \frac{1}{2} CM'_1P$ est aussi du second ordre, et son carré est du quatrième. La deuxième différence est donc du quatrième ordre.

La troisième différence étant celle de l'arc CC' à sa corde, son expression est donnée au numéro précédent. L'arc CC' étant égal à $\Delta\varrho$, et l'angle des tangentes en C et en C' à ε, on a, à un infiniment petit près d'ordre supérieur au troisième,

$$\text{arc } CC' - \text{corde } CC' = \frac{1}{24}\varepsilon^2\Delta\varrho.$$

On a donc, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à $M'M'_1$:

$$M'M'_1 = \frac{1}{8}\varepsilon^2\Delta\varrho + \frac{1}{24}\varepsilon^2\Delta\varrho$$

ou

$$M'M'_1 = \frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\varrho.$$

Nous avons supposé, dans la démonstration qu'on vient de lire, que le rayon de courbure allait croissant de M

vers M', et la figure a été construite en conséquence. S'il allait décroissant, la démonstration ne serait, comme nous allons le voir, que très légèrement modifiée.

On a (fig. 17), les mêmes lettres désignant les mêmes choses que dans la figure précédente.

$$\begin{aligned} M'M'_1 &= C'M'_1 - C'M' \\ &= C'M'_1 - CM + \text{arc}\, CC' \\ &= C'M'_1 - CM'_1 + \text{arc}\, CC' \\ &= PM'_1 - CM'_1 + \text{arc}\, CC' - C'P, \end{aligned}$$

et cette égalité peut s'écrire comme suit:

$$M'M'_1 = (\text{corde}\, CC' - C'P) - (CM'_1 - PM'_1) + (\text{arc}\, CC' - \text{corde}\, CC').$$

Les trois différences qui constituent les termes de la valeur de $M'M'_1$ sont restées les mêmes. L'une, il est vrai, est devenue soustractive, d'additive qu'elle était; mais c'est celle qui est du quatrième ordre et qui doit être négligée, en sorte que la démonstration continuerait comme ci-dessus.

Remarque. La longueur $M'M'_1$ est la distance de la courbe au cercle de courbure mesurée sur la normale à la courbe. Mais mesurée sur toute autre direction qui soit à la limite perpendiculaire à la tangente au point de contact, la distance de la courbe au cercle de courbure est encore égale à $\frac{1}{6}\varepsilon^2 \Delta\rho$, en ne négligeant qu'une quantité d'un ordre supérieur au troisiéme. Soit en effet m'_1 un point du cercle MY infiniment voisin de M, et supposons que la direction $M'm'_1$ tende à devenir perpendiculaire à la tangente en M, ou, en d'autres termes, que l'angle $M'_1M'm'_1$ soit infiniment petit. Joignant $M'_1m'_1$, le triangle $M'M'_1m'_1$ donne :

$$\frac{M'm'_1}{M'M'_1} = \frac{\sin M'_1}{\sin m'_1};$$

or l'angle M' tendant vers zéro, les angles M'_1 et m'_1 sont supplémentaires à la limite, et par suite le rapport de leurs

sinus tend vers l'unité. Les longueurs $M'm'_1$ et $M'M'_1$ sont donc des infiniment petits égaux, d'où il résulte que $\frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho$ est l'expression de $M'm'_1$ en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à lui même.

21. *Expression de la différence des angles que font avec la corde d'un arc infiniment petit les tangentes en ses extrémités.*

Les mêmes lettres (fig. 18) désignant les mêmes choses que dans les deux figures du numéro précédent (on n'a pas tracé les arcs MM', MM'_1 parce qu'ils auraient chargé la figure sans utilité), supposons pour fixer les idées que, comme dans la première, le rayon de courbure aille croissant de M vers M'. Soit MT la tangente au point M; menons les tangentes en M' et en M'_1 à la courbe considérée et au cercle, et soient L et L_1 les points où elles coupent MT. Soit S le point de rencontre de ces tangentes; nous devons montrer d'abord que S est situé entre l'arc MM' et MT. Soit à cet effet R le point où la tangente en M est coupée par une parallèle menée par M'_1 à la tangente en M'; nous allons chercher la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{RL}{RL_1}$. Nous trouverons un nombre inférieur à l'unité, et comme le rapport $\frac{RL}{RL_1}$ ne peut être inférieur à l'unité que si les tangentes $M'L$, M'_1L_1 se rencontrent avant de couper MT, il sera établi que le point S est situé entre l'arc MM' et MT.

On a

$$RL = \frac{M'M'_1}{\sin M'_1RT}, \quad RL_1 = \frac{M'_1L_1 \sin RM'_1L_1}{\sin M'_1RT},$$

d'où

$$\frac{RL}{RL_1} = \frac{M'M'_1}{M'_1L_1 \sin RM'_1L_1} = \frac{M'M'_1}{M'_1L_1 \sin CM'_1P} = \frac{M'M'_1 \,.\, CM'_1}{M'_1L_1 \,.\, CP}.$$

On n'altèrera pas la limite de ce dernier rapport si l'on remplace $M'M'_1$ par $\frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho$, CM'_1 par $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$, M'_1L_1 par $\frac{1}{2}\Delta s$ et CP par $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta\rho$. Ces substitutions faites, il vient $\frac{2}{3}$; on a donc

$$lim\ \frac{RL}{RL_1} = \frac{2}{3}.$$

La détermination que nous avons en vue est maintenant facile. Tirons les cordes MM', MM'_1; appelons M et M' les angles $M'ML$, $MM'L$, qui sont ceux dont nous voulons connaître la différence. Cette différence est du second ordre. Nous négligerons les quantités d'ordre supérieur.

On a

$$M = M'_1MT - M'_1MM'.$$

L'arc MM'_1 étant un arc de cercle, l'angle M'_1MT est rigoureusement égal à la moitié de son angle de contingence, c'est-à-dire à la moitié de M'_1L_1T. Désignant ce dernier par e, on a donc

$$M = \frac{1}{2}e - M'_1MM'.$$

La direction $M'M'_1$ tendant à devenir perpendiculaire à la corde MM', l'angle M'_1MM' et le rapport $\frac{M'M'_1}{corde\ MM'}$ sont des infiniment petits égaux. Mais ce rapport est du second ordre, puisque son numérateur est du troisième et son dénominateur du premier. L'angle M'_1MM' est donc du second ordre, et par suite on n'altèrera la valeur ci dessus de M que d'une quantité d'un ordre supérieur au second si l'on substitue à M'_1MM' une quantité qui lui soit égale en tant qu'infiniment petite. Le remplaçant par $\frac{M'M'_1}{corde\ MM'}$,

puis écrivant $\frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\varrho$ au lieu de $M'M'_1$ et Δs au lieu de *corde* MM', ce qui n'altère $\frac{M'M'_1}{\text{corde } MM'}$ que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui même, et, par suite, d'un ordre supérieur au second, il vient

$$M = \frac{1}{2}e - \frac{1}{6}\frac{\varepsilon^2\Delta\varrho}{\Delta s},$$

et cette valeur de M n'est fautive que d'un infiniment petit d'ordre supérieur au second.

Maintenant, le triangle SLL_1 donne

$$M'LT = M'_1L_1T - LSL_1;$$

ou, à cause de $M'LT = \varepsilon$, de $M'_1L_1T = e$, et de $LSL_1 = M'SM'_1 = CM'_1P$:

$$\varepsilon = e - CM'_1P$$

L'angle CM'_1P est du second ordre, parce que son sinus est le quotient de CP, qui est du second ordre, par CM'_1, qui est fini. On n'altèrera donc la valeur ci dessus de ε que d'une quantité d'un ordre supérieur au second si l'on substitue à CM'_1P une quantité qui lui soit égale en tant qu'infiniment petite. Le remplaçant par $\frac{CP}{CM'_1}$, puis écrivant $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta\varrho$ au lieu de CP, et au lieu de CM'_1 la quantité dont il est la limite, c'est-à-dire $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$, substitutions qui n'altèrent $\frac{CP}{CM'_1}$ que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui même, et par suite, d'un ordre supérieur au second, il vient:

$$\varepsilon = e - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2\Delta\varrho}{\Delta s},$$

et cette valeur de ε n'est fautive que d'un infiniment petit d'ordre supérieur au second.

Or M' est égal à $\varepsilon - M$. On aura donc la valeur de M' à un infiniment petit près d'ordre supérieur au second si dans $M' = \varepsilon - M$ on remplace ε et M par les valeurs ci dessus obtenues. Il vient

$$M' = e - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2 \Delta\varrho}{\Delta s} - \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{6}\frac{\varepsilon^2 \Delta\varrho}{\Delta s}\right) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2 \Delta\varrho}{\Delta s}.$$

On a donc, à un infiniment petit près d'ordre supérieur au second,

$$M - M' = \frac{1}{2}e - \frac{1}{6}\frac{\varepsilon^2 \Delta\varrho}{\Delta s} - \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2 \Delta\varrho}{\Delta s}\right),$$

ou,

$$M - M' = \frac{1}{6}\frac{\varepsilon^2 \Delta\varrho}{\Delta s}.$$

Remarque. Ce résultat, combiné avec l'égalité

$$\varepsilon = M + M',$$

conduit à la proposition suivante: *La quantité dont l'angle formé par la corde d'un arc infiniment petit avec la tangente en l'une de ses extrémités diffère de la moitié de l'angle de contingence est égale, en tant qu'infiniment petite, à* $\frac{1}{12}\frac{\varepsilon^2 \Delta\varrho}{\Delta s}$.

22. *Expression de la différence entre les parties des tangentes aux extrémités d'un arc infiniment petit comprises entre ces extrémités et le point de rencontre des tangentes.*

Reprenons la figure 1, où L est le point de rencontre des tangentes aux extrémités M et M' de l'arc; il s'agit de trouver la différence des longueurs ML, $M'L$. Elle est du second ordre, et nous la calculerons en négligeant les quantités d'ordres supérieurs.

Le triangle $MM'L$ donne

$$\frac{M'L}{ML} = \frac{\sin M}{\sin M'},$$

d'où,

$$\frac{M'L - ML}{ML} = \frac{\sin M - \sin M'}{\sin M'},$$

ou,

$$M'L - ML = (\sin M - \sin M')\frac{ML}{\sin M'}.$$

Nous avons vu au commencement du numéro 19 que la différence entre un arc infiniment petit du premier ordre et son sinus est une quantité du troisième ordre; on a donc, au degré d'approximation indiqué :

$$M'L - ML = (M - M')\frac{ML}{\sin M'}.$$

On n'altèrera le second membre que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui même si l'on remplace $M - M'$, ML et $\sin M'$ par des grandeurs qui leur soient égales en tant qu'infiniment petites. Remplaçant $M - M'$ par $\frac{1}{6}\frac{\varepsilon^2\Delta\varrho}{\Delta s}$, ML par $\frac{1}{2}\Delta s$, $\sin M'$ par M' puis par $\frac{1}{2}\varepsilon$, il vient :

$$M'L - ML = \frac{1}{6}\varepsilon\Delta\varrho.$$

Remarque. La quantité

$$M'L + ML - \Delta s$$

étant d'un ordre supérieur au second, puisqu'elle est inférieure à

$$M'L + ML - \text{corde}\, MM'$$

qui est du troisième ordre (19, remarque), on aura, ω désignant une quantité d'un ordre supérieur au second :

$$M'L + ML = \Delta s + \omega.$$

D'un autre côté, en vertu du résultat qu'on vient d'obtenir, on aura, ω' désignant une quantité d'ordre supérieur au second :

$$M'L - ML = \frac{1}{6}\varepsilon\Delta\varrho + \omega'.$$

On tire des deux dernières égalités :

$$M'L = \frac{1}{2}\Delta s + \frac{1}{12}\varepsilon\Delta\varrho + \frac{1}{2}(\omega + \omega'),$$

$$ML = \frac{1}{2}\Delta s - \frac{1}{12}\varepsilon\Delta\varrho + \frac{1}{2}(\omega - \omega'),$$

et comme $\omega + \omega'$ et $\omega - \omega'$ sont d'un ordre supérieur au second, on voit que *la différence entre l'une ou l'autre des longueurs ML, $M'L$ et la moitié de l'arc est, en tant qu'infiniment petite, égale à* $\frac{1}{12}\varepsilon\Delta\varrho$.

23. *Des trois chemins suivants, qui conduisent de l'une à l'autre des extrémités d'un arc infiniment petit, savoir: 1° la ligne brisée formée par les tangentes aux deux extrémités de l'arc, 2° l'arc lui même, 3° sa corde, l'excès du premier sur le second est double de l'excès du second sur le troisième.*

Désignant toujours par M et M' les deux extrémités de l'arc et par L le point de rencontre des tangentes en M et en M', il s'agit d'établir l'égalité suivante :

$$\lim \frac{ML + M'L - \text{arc}\, MM'}{\text{arc}\, MM' - \text{corde}\, MM'} = 2.$$

Nous avons vu, dans la remarque qui termine le numéro 19, qu'on a

$$ML + M'L - \text{corde}\, MM' = 2ML \sin^2 \frac{1}{2} M + 2M'L \sin^2 \frac{1}{2} M'.$$

Le sinus d'un angle du premier ordre ne différant de l'angle que d'une quantité du troisième, la valeur du second membre ne sera altérée que d'une quantité du cinquième ordre si l'on remplace $\sin\frac{1}{2}M$ et $\sin\frac{1}{2}M'$ par $\frac{1}{2}M$ et $\frac{1}{2}M'$. Par l'effet de ces substitutions le second membre devient

$$\frac{1}{2}M^2 . ML + \frac{1}{2}M'^2 . M'L ;$$

on a donc, à un infiniment petit du cinquième ordre près :

$$ML + M'L - \text{corde}MM' = \frac{1}{2}M^2 . ML + \frac{1}{2}M'^2 . M'L.$$

Or dans les deux numéros précédents on a trouvé, en supposant que le rayon de courbure croisse de M en M',

$$ML = \frac{1}{2}\Delta s - \frac{1}{12}\varepsilon\Delta\varrho, \qquad M'L = \frac{1}{2}\Delta s + \frac{1}{12}\varepsilon\Delta\varrho,$$

$$M = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{12}\frac{\varepsilon^2\Delta\varrho}{\Delta s}, \qquad M' = \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{12}\frac{\varepsilon^2\Delta\varrho}{\Delta s},$$

et comme ces valeurs ne sont fautives que de quantités d'ordre supérieur au second, en les substituant dans le second membre de l'égalité précédente on ne l'altèrera que d'une quantité d'ordre supérieur au quatrième. Effectuant les substitutions et réduisant, il vient, en négligeant les termes d'ordre supérieur au quatrième, $\frac{1}{8}\varepsilon^2\Delta s$; on a donc, à un infiniment près d'ordre supérieur au quatrième :

$$ML + M'L - \text{corde}MM' = \frac{1}{8}\varepsilon^2\Delta s.$$

Mais nous avons trouvé au numéro 19

$$\text{arc}MM' - \text{corde}MM' = \frac{1}{24}\varepsilon^2\Delta s.$$

Retranchant ces deux égalités membre à membre, on a, à un infiniment petit près d'ordre supérieur au troisième :

$$ML + M'L - \text{arc}MM' = \frac{1}{12}\varepsilon^2\Delta s.$$

Divisant membre à membre les deux dernières égalités et passant à la limite, il vient :

$$\lim \frac{ML + M'L - \text{arc}\,MM'}{\text{arc}\,MM' - \text{corde}\,MM'} = 2,$$

ce qu'on voulait démontrer.

SECONDE PARTIE.

DES COURBES GAUCHES.

Avant d'aborder l'étude des propriétés des courbes gauches, il est nécessaire d'établir la propriété fondamentale des surfaces, et de présenter quelques considérations sur les surfaces développables

24. *M désignant un point quelconque d'une surface, les tangentes en M à toutes les courbes tracées par ce point sur la surface sont, en général, contenues dans un même plan.*

Toute surface peut être considérée comme engendrée par une ligne qui se meut dans l'espace en se déformant d'une manière continue. Cette ligne est nommée *génératrice*. Soit MX (fig. 19) la génératrice au point M, et soient MY, MZ deux courbes quelconques tracées sur la surface par ce point. Comme deux droites qui se coupent déterminent un plan, notre proposition sera démontrée si nous faisons voir que les tangentes en M aux courbes MX, MY, MZ sont contenues dans un même plan.

Considérons la génératrice dans une position infiniment voisine de MX, et soient M', M'' les points où elle coupe MY et MZ. Le plan $MM'M''$ contient : 1° La corde MM', qui, à la limite, devient la tangente en M à la courbe MY;

2° la corde *MM''*, qui, à la limite, devient la tangent
M à la courbe *MZ*; 3° la corde *M'M''*, qui, sauf e
cas exceptionnels, diffère infiniment peu de la tangent
M' à la génératrice, et par suite aussi de la tangente
à *MX*. Donc la limite du plan *MM'M''* contient en gé
les tangentes en *M* aux trois courbes *MX*, *MY*, *MZ*, c
démontre la proposition.

Le plan qui contient les tangentes à toutes les co
tracées sur une surface par un de ses points est ce
appelle *le plan tangent à la surface en ce point.*

Corollaire I. Le plan tangent en un point *M* d'une
face est déterminé par les tangentes en *M* à deux
conques des courbes qu'on peut conduire par ce poin
la surface.

Corollaire II. Dans toute surface réglée, (on appelle
celles qui, comme les cônes et les cylindres, sont e
drées par le mouvement d'une droite), le plan tange
un point quelconque contient la génératrice qui pass
ce point.

Corollaire III. *M'* étant un point de la surface infini
voisin de *M*, la distance de *M'* au plan tangent en
en général du second ordre, *MM'* étant considéré co
du premier. La distance de *M'* à tout autre plan co
par *M* est du même ordre que *MM'*.

25. Concevons qu'un mobile se meuve sur une su
réglée en se transportant le long d'une génératrice, et
chacun des points par lesquels il passe on considè
plan tangent. Il arrivera de deux choses l'une: ou bi
plan tangent, qui ne cesse pas de contenir la généra
changera de direction d'un point à l'autre, tournant a
de la génératrice, ou bien il ne changera pas de dire
et restera identique à lui même. Dans ce dernier ca
plan tangent en un point de la surface est tangent to

long de la génératrice qui passe par ce point. Ce cas est évidemment celui des cylindres et des cônes, et c'est encore celui d'autres surfaces que nous apprendrons plus loin à connaître.

Lorsque le plan tangent en un point d'une surface réglée est tangent dans toute l'étendue de la génératrice qui passe par ce point, on peut faire rouler un plan sur la surface, et dans chacune des positions successives qu'il prend en vertu de ce mouvement, il *touche* la surface dans toute l'étendue d'une droite. Il est évident qu'alors la surface peut être développée sur un plan, car on peut concevoir que le plan roulant considéré tout à l'heure entraîne avec lui tout ce qu'il touche, comme s'il était recouvert d'une matière visqueuse, et alors, son mouvement terminé, il aura développé la surface sans déchirures et sans plicatures. C'est pour cela que les surfaces réglées en lesquelles le plan tangent est tangent tout le long d'une génératrice, sont appelées *surfaces développables*. Les autres surfaces réglées, celles en lesquelles le plan tangent varie d'un point à un autre d'une même génératrice, sont appelées *surfaces gauches*.

26. Concevons une courbe tracée sur une surface développable. Le plan que nous supposons rouler sur la surface en en entraînant les parties à mesure qu'il les touche entraînera aussi la courbe, qui finira par se trouver transformée en une courbe plane. Nous admettons comme évident qu'*à chaque instant du mouvement la partie déjà développée de la courbe se raccorde avec celle qui ne l'est pas encore, de sorte qu'à leur point de rencontre ces deux parties ont même tangente.*

Au lieu de se représenter le plan déroulant sur lui même la surface, on peut se le représenter s'enroulant sur elle de manière à l'envelopper peu à peu. Alors une courbe

préalablement tracée sur le plan se transformera en u courbe tracée sur la surface, et à chaque instant du mo vement la partie déjà enroulée se raccordera avec ce qui ne l'est pas encore, de sorte qu'à leur point de re contre ces deux parties auront même tangente. Si au li d'une courbe on a tracé sur le plan une droite, elle trouvera à chaque instant tangente à la courbe suiv laquelle elle s'enroule, au point où elle s'en sépare.

Concevons que l'on déroule une surface développa sur le plan tangent suivant l'une de ses génératric Considérons une courbe tracée sur la surface et coup cette génératrice en un point M. De la proposition énon tout à l'heure il résulte que la tangente en M à cette cou est tangente aussi en M à sa transformée située dans plan tangent.

27. Nous admettons encore comme évident que la lo gueur d'un arc de courbe tracé sur une surface développa n'est point altérée par le développement de la surface un plan En d'autres termes, *un arc de courbe tracé sur surface développable est égal en longueur à la transformée pl à laquelle il donne naissance quand on développe la surface.* même égalité a lieu entre un arc tracé sur un plan et transformée à laquelle il donne naissance quand on roule le plan sur une surface développable.

Nous aurons plus tard à revenir aux surfaces dévelo pables; nous les quittons maintenant pour nous occu des courbes.

28. *Dans une courbe gauche, comme dans une courbe pla un arc infiniment petit et sa corde sont des infiniment petits éga*

Soit MM' (fig. 20) l'arc gauche considéré; il s'agit montrer que, M' étant infiniment voisin de M, on a:

$$\lim \frac{\text{arc } MM'}{\text{corde } MM'} = 1.$$

Par le point M faisons passer un plan qui ne soit pas perpendiculaire à la tangente en ce point, puis faisons glisser le long de l'arc une droite assujettie à rester perpendiculaire à ce plan; cette droite engendre un cylindre et décrit sur ce plan un arc dont nous désignerons par m' la seconde extrémité. Soient MT, Mt les tangentes en M aux arcs MM', Mm'; elles sont situées dans le plan tangent au cylindre suivant la génératrice qui passe par M (24).

Développons le cylindre sur ce plan tangent, et soient M_1, m'_1 les positions que viennent occuper M' et m' par l'effet du développement; m'_1 est situé sur Mt, et MT est tangent au point M à la transformée de l'arc MM', c'est à dire à l'arc MM'_1 (26). En outre, on a (27)

$$\text{arc}\, MM'_1 = \text{arc}\, MM', \qquad Mm'_1 = \text{arc}\, Mm'.$$

Dans les triangles $MM'_1m'_1$ et $MM'm'$ les angles en m'_1 et en m' étant droits, on a

$$Mm'_1 = \text{corde}\, MM'_1 \cos M'_1Mm'_1,$$
$$\text{corde}\, Mm' = \text{corde}\, MM' \cos M'Mm'.$$

On tire de là par division

$$\frac{Mm'_1}{\text{corde}\, Mm'} = \frac{\text{corde}\, MM'_1}{\text{corde}\, MM'} \frac{\cos M'_1Mm'_1}{\cos M'Mm'}.$$

Le premier membre de cette égalité tend vers l'unité, car il est égal à $\frac{\text{arc}\, Mm'}{\text{corde}\, Mm'}$, et l'arc Mm' est plan. D'un autre côté, les angles $M'_1Mm'_1$ et $M'Mm'$ tendant tous deux vers TMt, et celui-ci n'étant pas droit, puisque par hypothèse le plan conduit par M n'est pas perpendiculaire à MT, le rapport $\frac{\cos M'_1Mm'_1}{\cos M'Mm'}$ tend vers l'unité. On a donc :

$$\lim \frac{\text{corde}\, MM'_1}{\text{corde}\, MM'} = 1.$$

Mais l'arc MM'_1 étant plan, on peut le substituer à corde, ce qui donne

$$lim \frac{arc\ MM'_1}{corde\ MM'} = 1,$$

ou, à cause de l'égalité des arcs MM'_1 et MM',

$$lim \frac{arc\ MM'}{corde\ MM'}. = 1,$$

ce qu'on voulait démontrer.

29. *Dans une courbe gauche, comme dans une courbe pl l'angle des tangentes aux deux extrémités d'un arc infinin petit est, en général, du même ordre que l'arc.*

Pour établir cette proposition il ne suffit pas, com dans le cas des courbes planes, de rappeler le princ général qui consiste en ce que le rapport des accrois ments simultanés et infiniment petits de denx variab fonctions l'une de l'autre tend en général vers une lin finie, car, si dans une courbe gauche l'angle que fait tangente avec une droite fixe est bien encore, comme d une courbe plane, une fonction de l'arc compté à pa d'un point quelconque de la courbe, l'angle que font en elles les tangentes en deux points n'est plus l'accroissem que reçoit cette fonction quand on passe du premier pc au second.

Concevons que tandis qu'un mobile se transporte long de la courbe gauche considérée, une droite, assuje à passer toujours par le centre d'une sphère qui a l'ur pour rayon, se meuve de manière à être toujours parall à la tangente à la courbe au point où le mobile se trou dans le même instant. Cette droite, en vertu de son mc vement, décrit une certaine courbe sur la surface de sphère. L'arc de cette courbe et celui de la courbe prir tive, compté à partir de points quelconques pris sur courbes, sont deux quantités fonctions l'une de l'autre,

dès lors les accroissements simultanés et infiniment petits de l'un et de l'autre sont du même ordre infinitésimal. Si donc M et M' sont les extrémités de l'arc considéré, et m et m' les points de la courbe tracée sur la sphère qui correspondent à M et à M', les arcs MM', mm' sont du même ordre.

Cela posé, par m et m' faisons passer un grand cercle de la sphère. L'angle des tangentes en M et M' étant égal à l'arc de grand cercle mm', la question est ramenée à démontrer que cet arc est du même ordre que l'arc mm' considéré tout à l'heure et décrit sur la sphère par la parallèle à la tangente. Or non seulement ces deux arcs sont du même ordre, mais ce sont des infiniment petits égaux, puisqu'ils ont la même corde (28). La proposition est ainsi démontrée.

Corollaire. Nous avons vu que dans une courbe plane la distance d'une extrémité d'un arc infiniment petit à la tangente en l'autre extrémité est du second ordre, l'arc étant du premier. Il est aisé de reconnaître qu'il en est de même dans une courbe gauche. Il suffit pour cela de projeter sur un plan la figure formée par la courbe, la corde de l'arc infiniment petit, la tangente, et la perpendiculaire abaissée sur la tangente; alors la démonstration sera fondée sur ce que la projection de la tangente est tangente à la projection de la courbe (comme il résulte immédiatement de la définition même de la tangente), et sur ce qu'une droite infiniment petite et sa projection sont du même ordre infinitésimal, pourvu seulement que l'angle que fait la droite projetée avec le plan de projection ne soit pas droit à la limite.

Nous verrons du reste prochainement que la distance d'une extrémité d'un arc infiniment petit à la tangente en l'autre extrémité a pour expression, comme dans les

courbes planes, la moitié du produit de l'arc par l'a de contingence.

30. *Du plan osculateur.* De même que parmi les dr qui passent par un point donné d'une courbe, il y en a la tangente, qui est plus importante à considérer que autres, de même, parmi les plans qui passent par un p donné d'une courbe gauche, il y en a un qui est part lièrement remarquable. Pour arriver à la notion de plan, nous nous proposerons de chercher l'ordre de g deur de la distance d'une extrémité d'un arc infinir petit à un plan passant par l'autre. Nous appelleron l'extrémité par laquelle passe le plan, M' l'autre, et considérerons l'arc MM' comme du premier ordre.

Soit P (fig. 21) le pied de la perpendiculaire abai de M' sur le plan; $M'P$ est la longueur dont nous vou déterminer l'ordre infinitésimal. On a

$$\frac{M'P}{MM'} = \sin M'MP,$$

d'où, en désignant par α l'angle que fait la tangente point M avec le plan,

$$\lim \frac{M'P}{MM'} = \sin \alpha.$$

Lors donc que le plan ne contient pas la tangent point M, la limite du rapport $\frac{M'P}{MM'}$ est finie, et par $M'P$ est du premier ordre.

Supposons maintenant que le plan contienne la tang à la courbe au point M; alors l'angle α étant nul, $M'P$ (fig n'est plus du premier ordre, et nous allons prouver qu'i généralement du même ordre que la distance de M' tangente en M, par conséquent du second. De M' ab sons $M'T$ perpendiculaire sur la tangente en M, et joign

PT, qui sera aussi perpendiculaire sur cette tangente. Dans le triangle *M'PT*, rectangle en *P*, l'angle *T* est fini; pour qu'il fût infiniment petit, il faudrait que le plan fût dirigé suivant la limite de la direction *TM'*, et pour le moment nous écarterons ce cas. L'angle *T* étant fini et l'angle *P* l'étant aussi puisqu'il est droit, le rapport des longueurs *M'P* et *M'T* est fini, et par suite elles sont du même ordre, ce qu'on voulait démontrer.

Il ne nous reste à considérer que le cas exceptionnel que nous avons écarté tout à l'heure, celui où le plan est conduit par la tangente et par la limite de la direction *M'T*. Alors *M'P*, distance du point *M'* à ce plan, est d'un ordre supérieur à celui de *M'T*, distance de *M'* à la tangente, puisqu'il est le produit de *M'T* par le sinus de l'angle *M'TP*, qui, par hypothèse, tend vers zéro. Nous verrons plus tard qu'il est du troisième ordre, et nous en donnerons l'expression.

Il existe donc en chaque point d'une courbe gauche un plan dont le contact avec la courbe est plus intime que celui de tout autre plan passant par le même point. Sa distance à la courbe est d'un ordre supérieur à la distance de la courbe à la tangente, et parmi tous les plans qui passent par le point considéré il est le seul qui jouisse de cette propriété. Ce plan remarquable a reçu le nom de *plan osculateur*. D'après ce qui précède, il est la limite du plan conduit par la tangente et par la perpendiculaire abaissée sur la tangente d'un point infiniment voisin du point de contact. En d'autres termes, *le plan osculateur en un point d'une courbe gauche est la limite du plan déterminé par la tangente en ce point et par un second point de la courbe infiniment voisin.*

Le plan osculateur peut encore, comme nous le verrons dans les numéros suivants, être envisagé de deux autres

manières. 1° Comme limite du plan conduit par la tang au point considéré parallèlement à celle en un point niment voisin; 2° comme limite du plan déterminé pa point considéré et par deux autres points de la courbe finiment voisins de lui.

31. *Le plan osculateur en un point M d'une courbe g est identique avec la limite du plan déterminé par la tangen M et par une parallèle menée par M à la tangente en un M' infiniment voisin de M.*

Soit *MT* (fig. 23) la tangente au point *M*, et *MK* l'in section du plan osculateur et du plan normal, c'est-à- perpendiculaire à la tangente; le plan *TMK* est le osculateur au point *M*.

Soit *MX* l'intersection avec le plan normal du plan nous avons en vue, c'est-à-dire du plan mené par parallèlement à la tangente en *M'*. L'angle que fait ce avec le plan osculateur est l'angle *XMK*, et par sui proposition sera démontrée si l'on fait voir que l'a *XMK* tend vers zéro lorsque *M'* se rapproche indéfinir de *M*.

A cet effet, projetons la courbe sur le plan normal; *m'* la projection de *M'* et *p* le pied de la perpendicu abaissée de *m'* sur *MK*. Les longueurs *m'M* et *m'p* respectivement egales aux distances du point *M'* à la gente et au plan osculateur en *M*; dès lors, en vert la définition du plan osculateur, *m'p* est infiniment par rapport à *mM'*, d'où il résulte que l'angle *m'MK* infiniment petit, et par suite, que *MK* est tangent en *M* projection de la courbe Projetons maintenant sur le normal la tangente à la courbe au point *M'*; la projec de cette tangente est tangente en *m'* à la projection d courbe, d'où il résulte que si l'on désigne par *l* le p où elle coupe *MK*, l'angle *m'lK* est infiniment petit.

MX est parallèle à $m'l$; donc l'angle XMK est égal à l'angle $m'lK$; par conséquent il est infiniment petit, ce qui démontre la proposition

32. Concevons, comme nous l'avons déjà fait plus haut, que tandis qu'un mobile se transporte le long de la courbe gauche considérée, une droite, assujettie à passer toujours par un certain point de l'espace, se meuve de manière à être toujours parallèle à la tangente au point où le mobile se trouve dans le même instant. Cette droite décrit une surface conique dont les génératrices sont parallèles aux tangentes de la courbe donnée. Appelons μ, μ' les génératrices parallèles aux points M, M' de cette courbe. Le plan conduit par μ et μ' est parallèle au plan conduit par la tangente en M parallèlement à celle en M'; donc, à la limite, le plan (μ, μ') est parallèle au plan osculateur en M. Mais à la limite le plan (μ, μ') est tangent à la surface conique suivant la génératrice μ; par conséquent, les plans osculateurs de la courbe considérée sont parallèles aux plans tangents à la surface conique.

Nous aurons quelquefois à faire usage du cône dont nous venons de décrire la génération.

33. *Le plan osculateur traverse en général la courbe au point de contact.*

Soit M le point de la courbe donnée en lequel nous considérons le plan osculateur. Coupons par un plan quelconque le cône construit au numéro précédent, et soit a le point de la courbe d'intersection situé sur la génératrice parallèle à la tangente en M. Nous allons montrer que si le plan osculateur ne traverse pas la courbe donnée au point M, il y a, sur la courbe d'intersection, inflexion au point a. Comme les points d'inflexion sont nécessairement isolés, il résultera de là que ce n'est qu'en des points isolés que le plan osculateur ne traverse pas la courbe au point de contact, et la proposition se trouvera démontrée.

Supposons donc que le plan osculateur ne traverse la courbe au point M; alors, dans le voisinage de M et part et d'autre de ce point, la courbe est située d'un m côté du plan osculateur. Si donc on conduit un plan la tangente en M et par un point M' infiniment voisin coupera la courbe en un autre point M'' infiniment vo de M et situé par rapport à M' de l'autre côté de M.

Cela posé, reprenons la figure du numéro 31, dans quelle m' est la projection de M' sur le plan normal en Le plan conduit par la tangente en M et par le poin contient la droite Mm', qui est une corde de la projec de la courbe sur ce plan normal.

Il existe sur l'arc Mm' un point en lequel la tang est parallèle à la corde Mm'; désignons le par n' et N' le point de la courbe considérée dont il est la pro tion, N' est situé entre M et M', et la tangente en n' la projection de celle en N'. Il résulte de là et de ce le plan déterminé par la tangente en M et par le poin contient la corde Mm', que ce plan contient la para menée par M à la tangente en N'. Puisque ce même passe par un point M'' situé par rapport à M' de l'a côté de M, il contient encore la parallèle menée par la tangente en un point N'' infiniment voisin de M et s par rapport à N' de l'autre côté de M

Reprenons maintenant le cône considéré au num précédent, et soient μ, ν', ν'' les génératrices parall aux tangentes en M, N', N''; ν'' est situé sur le cône l'autre côté de μ par rapport à ν', et les trois générati μ, ν', ν'' se trouvent, en vertu de ce qui précède, tenues dans un même plan.

Coupons le cône par un plan quelconque; nous obt drons une courbe dont nous désignerons par a, b' e les points situés sur μ, ν', ν''; b'' est situé sur la cou

de l'autre côté de a par rapport à b'. Ces trois points étant contenus dans le plan des génératices μ, ν', ν'', la corde ab' de la courbe d'intersection passe par b''; or puisque b' et b'' sont infiniment voisins de a, cela ne peut avoir lieu que si au point a il y a inflexion. La proposition est ainsi démontrée.

34. *Le plan osculateur en un point M d'une courbe gauche est identique avec la limite du plan déterminé par le point M et par deux points M', M'' de la courbe infiniment voisins de M.*

Soit MT (fig. 24) la tangente en M à la courbe considérée, et $M''T''$ la tangente en M''. Conduisons un plan par la tangente MT et par le point M'', et un autre par la tangente $M''T''$ et par le point M. Ces deux plans et celui que nous avons en vue, c'est-à-dire le plan $MM'M''$, contiennent tous trois la corde MM''.

Le plan TMM'' fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur en M, et le plan $T''M''M$ fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur en M''. L'angle de ces deux plans osculateurs étant infiniment petit, il en est de même de celui des plans TMM'', $T''M''M$. Donc, des quatre angles que ces deux plans font entre eux, deux sont infiniment petits et les deux autres tendent vers deux droits. Il sera dès lors établi que le plan $MM'M''$ se confond à la limite avec le plan osculateur en M, si l'on fait voir qu'il est compris dans les deux angles infiniment petits que font les plans TMM'' et $T''M''M$, et à cet effet il suffit de démontrer que l'arc $MM'M''$ est compris dans l'un des deux angles infiniment petits.

Ramenée à ces termes, la proposition est évidente ; car puisque l'arc est infiniment petit, il serait impossible, s'il était situé dans l'un des deux grands angles, que chacun des deux plans contînt la tangente en l'une de ses extré-

mités. Il faut donc qu'il soit compris dans l'un des deux angles infiniment petits.

La proposition est ainsi démontrée.

On peut encore la démontrer comme suit :

Soit toujours MK (fig. 25) l'intersection du plan osculateur et du plan normal en M, et MT la tangente ; il s'agit de prouver que le plan $M'MM''$ se confond à la limite avec le plan TMK. La droite MM', contenue dans le plan $MM'M''$, fait un angle infiniment petit avec MT. Nous allons dans ce même plan déterminer une droite faisant un angle infiniment petit avec MK, et de là il résultera qu'il se confond à la limite avec le plan TMK, car quand un plan mobile contient deux droites dont les directions diffèrent infiniment peu de celles de deux droites d'un plan fixe qui font entre elles un angle fini, il tend à se confondre avec ce plan fixe, à moins toutefois que l'intersection des deux plans ne s'éloigne indéfiniment, auquel cas ils seraient parallèles à la limite.

Par M'' menons un plan perpendiculaire à MT, et soit a le point où il coupe la droite MM' ; la droite $M''a$ est située dans le plan $MM'M''$; nous allons montrer qu'elle fait un angle infiniment petit avec le plan TMK, et par suite aussi avec la droite MK. La proposition se trouvera alors démontrée.

D'un point quelconque A de la courbe abaissons AP perpendiculaire sur MT, AQ perpendiculaire sur le plan osculateur, et joignons PQ, qui se trouve aussi perpendiculaire à MT. Si l'on suppose que le point A se rapproche indéfiniment de M, AP est infiniment petit par rapport à MP, car l'angle AMP tend vers zéro ; de plus, comme en vertu de la définition du plan osculateur l'angle APQ tend aussi vers zéro, AQ est infiniment petit par rapport à PQ, et les longueurs AP et PQ sont des infiniment petits égaux. On a par conséquent :

$$lim \frac{PQ}{MP} = 0, \quad lim \frac{AQ}{PQ} = 0.$$

Prenons MT pour axe des x, MK pour axe des y, et pour axe des z la perpendiculaire élevée en M sur le plan TMK. Soient

$$y = F(x), \qquad z = f(x)$$

les équations des projections de la courbe sur le plan des xy et sur celui des xz. Les coordonnées du point A sont

$$x = MP, \qquad y = PQ, \qquad z = AQ,$$

et par suite, si l'on suppose que x tende vers zéro, on a, en vertu de ce qui précède :

$$lim \frac{F(x)}{x} = 0, \quad lim \frac{f(x)}{F(x)} = 0.$$

Désignons par x', x'' les x des points M' et M''; les coordonnées du point a seront

$$x = x'', \; y = \frac{x''}{x'} F(x'), \; z = \frac{x''}{x'} f(x').$$

Par suite, la tangente de l'angle que fait la droite $M''a$ avec le plan xy est égale à

$$\frac{f(x'') - \frac{x''}{x'} f(x')}{F(x'') - \frac{x''}{x'} F(x')},$$

et notre théorème sera démontré si nous faisons voir que cette expression tend vers zéro avec x' et x''. Pour simplifier, divisons la haut et bas par x'', et posons

$$\frac{F(x)}{x} = \varphi(x), \quad \frac{f(x)}{x} = \psi(x);$$

elle deviendra

$$\frac{\psi(x'') - \psi(x')}{\varphi(x'') - \varphi(x')},$$

et en vertu de l'hypothèse, on aura, x tendant vers zéro,

$$lim\, \varphi(x) = 0, \quad lim\, \psi(x) = 0, \quad lim \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Pour démontrer que le rapport $\frac{\psi(x'') - \psi(x')}{\varphi(x'') - \varphi(x')}$ tend vers zéro avec x' et x'', concevons que sur deux axes rectangulaires OX, OY on construise une courbe en prenant pour abscisses les diverses valeurs que prend $\varphi(x)$ quand on fait varier x à partir de zéro, et pour ordonnées les valeurs correspondantes de $\psi(x)$. Cette courbe passe par l'origine, puisqu'on a $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$. De plus, elle est tangente à l'origine à l'axe OX; en effet, la tangente de l'angle que fait avec OX une sécante passant par l'origine est égale à $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, et comme ce rapport tend vers zéro avec x, la courbe est tangente à l'origine à l'axe OX. Maintenant $\frac{\psi(x'') - \psi(x')}{\varphi(x'') - \varphi(x')}$ est l'expression de la tangente de l'angle que fait avec l'axe OX la sécante conduite par les points de la courbe obtenus en faisant successivement dans $\varphi(x)$ et dans $\psi(x)$, $x = x'$ et $x = x''$. Or cet angle est infiniment petit, puisque x' et x'' tendent vers zéro et que la courbe est tangente à l'origine à l'axe OX. Donc le rapport $\frac{\psi(x'') - \psi(x')}{\varphi(x'') - \varphi(x')}$ tend vers zéro avec x' et x'', et la proposition se trouve démontrée.

35. *L'angle que font entre eux les plans osculateurs aux deux extrémités d'un arc infiniment petit est, en général, du même ordre que l'arc.*

Pour établir cette proposition, on pourrait se servir du cône dont les génératrices sont parallèles aux tangentes de la courbe (32). Soient μ, μ' les génératrices qui correspondent aux extrémités M et M' de l'arc; l'angle de ces génératrices étant du même ordre que l'arc MM' puisqu'il est égal à l'angle des tangentes en M et en M', et les plans tangents au cône suivant μ et μ' étant parallèles aux plans oscu-

lateurs en *M* et en *M'*, la proposition serait ramenée à démontrer que dans un cône l'angle des plans tangents suivant deux génératrices infiniment voisines est en général du même ordre que l'angle que font entre elles ces génératrices. Il n'y aurait à cela aucune difficulté, mais on peut arriver au but plus promptement et plus directement en se fondant sur ce que l'angle de deux plans est égal à celui de leurs normales.

Concevons que tandis qu'un mobile se transporte le long de la courbe considérée, une droite, assujettie à passer toujours par le centre d'une sphère dont le rayon a l'unité de longueur, se meuve de façon à être continuellement normale au plan osculateur au point de la courbe où le mobile se trouve au même instant. Cette droite décrit sur la sphère une courbe dont nous désignerons par *m* et *m'* les points qui correspondent à *M* et à *M'*. L'arc *mm'* de cette courbe est du même ordre infinitésimal que l'arc *MM'* de la courbe donnée, et comme l'angle des plans osculateurs en *M* et en *M'* est égal à l'angle *mom'*, *o* désignant le centre de la sphère, tout revient à démontrer que l'arc *mm'* et l'angle *mom'* sont du même ordre. Or il est évident que non seulement ils sont du même ordre, mais que ce sont des infiniment petits égaux, car si l'on mène par *m* et *m'* un grand cercle de la sphère, l'angle *mom'* est égal à l'arc *mm'* de ce grand cercle, et cet arc a la même corde que l'arc *mm'* de la courbe décrite par la normale au plan osculateur.

La proposition est ainsi démontrée.

L'angle des plans osculateurs en deux points infiniment voisins est un élément dont la considération est essentielle dans l'étude des courbes gauches Il constitue ce qu'on nomme *la torsion*, ou encore *la seconde courbure*, et de là vient que les courbes gauches sont souvent appelées *courbes à double courbure.*

Nous avons désigné par *rayon de courbure au point M* la limite du rapport d'un arc MM' à l'angle des tangentes en ses extrémités en supposant le point M fixe et le point M' s'en rapprochant indéfiniment. Désormais, lorsqu'il s'agira de courbes gauches, nous appellerons cette limite *rayon de la première courbure*, et nous désignerons par *rayon de la seconde courbure au point M* la limite du rapport de l'arc MM' à l'angle des plans osculateurs en M et en M'. L'angle des plans osculateurs en deux points infiniment voisins sera appelé *angle de torsion*, et sera désigné par la lettre grecque η. L'angle des tangentes continuera à être appelé *angle de contingence* et à être désigné par ϵ.

36. *La tangente en un point M d'une courbe gauche est la limite de l'intersection des plans osculateurs en M et en un second point infiniment voisin; de plus, le point M est la limite du point de rencontre de la tangente en M et de l'intersection des deux plans osculateurs*

Soit toujours MK (fig. 26) l'intersection du plan normal et du plan osculateur en M, et MT la tangente; le plan TMK est le plan osculateur en M

Soit a le point où la tangente en un point A de la courbe, situé à une distance finie de M, perce le plan TMK; a est un point de l'intersection des plans osculateurs en M et en A. Nous allons en déterminer la position.

Soient MB et MC les projections de la courbe donnée sur le plan osculateur et sur le plan normal en M, B et C étant les projections de A. Les courbes MB, MC sont respectivement tangentes en M aux droites MT, MK, et les projections de la tangente en A sont tangentes à ces courbes en B et en C.

Soit maintenant q le point où la tangente en C à la courbe MC coupe MK; q est la projection du point a sur le plan normal, d'où il suit que a est l'intersection de la

tangente en B à la courbe MB et d'une parallèle menée par q à MT. Il résulte de là, si toutefois l'on suppose A assez voisin de M pour que l'arc MB soit convexe, que a est situé entre l'arc MB et la tangente MT. Dès lors, si une droite glisse de A en M le long de la courbe donnée en lui restant toujours tangente, la courbe Ma qu'elle trace sur le plan osculateur en M passe entre MT et l'arc MB, et, par suite, est tangente en M à MT.

Nous allons maintenant démontrer que l'intersection des plans osculateurs en M et en A est précisément tangente en a à cette nouvelle courbe, et de là résultera immédiatement la double proposition qui fait l'objet de ce numéro.

Concevons que par le point A (fig 27) on mène une parallèle à la tangente en un point A' infiniment voisin de A, et soit b le point où elle perce le plan osculateur en M. Le plan osculateur en A est la limite du plan déterminé par les droites Aa, Ab (31), et, par suite, l'intersection des plans osculateurs en M et en A est la limite de la direction ab. La question est donc ramenée à prouver que cette limite est tangente en a à la courbe Ma. Nous allons montrer que la longueur ba', a' désignant le point où la tangente en A' rencontre la courbe Ma, est du second ordre, l'arc aa' étant considéré comme du premier. Il suivra de là que l'angle $a'ab$ est infiniment petit, et, par conséquent que la limite de la direction ab est identique avec la limite de la direction aa'. Comme cette dernière limite n'est autre que la tangente en a à la courbe Ma, la proposition se trouvera démontrée.

La longueur ba' est le quotient qu'on obtient en divisant la distance des droites Ab, $A'a'$ par le sinus de l'angle que fait ba' avec l'une ou l'autre de ces droites. Cet angle étant fini, puisque Ab et $A'a'$ font un angle fini avec le plan osculateur en M, il suffit de montrer que la distance de

ces droites est du second ordre. Or elle n'est autre que la distance de A à la tangente en A', d'où il suit qu'elle est de l'ordre du carré de l'arc AA' (29, corollaire). Mais l'arc AA' est nécessairement du même ordre que aa', c'est-à-dire du premier. La distance des droites Ab et $A'a'$ est du second ordre.

La double proposition énoncée en tête de ce numéro se trouve ainsi démontrée.

37. *Un point quelconque M d'une courbe gauche est la limite de l'intersection du plan osculateur en M et de ceux en deux points M' et M'' infiniment voisins de M.*

Cette intersection est le point suivant lequel se coupent les intersections des plans osculateurs en M' et en M'' avec le point osculateur en M. C'est donc le point de rencontre des tangentes à la courbe Ma, considérée au numéro précédent, en deux points infiniment voisins de M. Or un tel point est lui même infiniment voisin de M, ce qui démontre la proposition.

38. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de présenter quelques considérations sur l'emploi des courbes auxiliaires dans les démonstrations qui ont pour but d'établir les propriétés qu'une courbe possède en chacun de ses points. Nous avons surtout en vue d'indiquer une précaution sans laquelle l'introduction de ces courbes dans le raisonnement pourrait quelquefois conduire à des résultats inexacts.

Il faut distinguer deux cas.

Tantôt la courbe auxiliaire est indépendante de la position du point que l'on considère sur la courbe donnée, ou, en d'autres termes, reste la même quel que soit ce point. Telles étaient les courbes auxiliaires dont nous avons fait usage aux numéros 29 et 35 pour établir que l'angle

des tangentes et celui des plans osculateurs en deux points d'une courbe gauche infiniment voisins sont en général du même ordre infinitésimal que l'arc que ces deux points comprennent; telle était encore celle dont nous nous sommes servis au numéro 33 pour prouver que le plan osculateur traverse en général la courbe au point de contact. Il n'y a aucune précaution spéciale à prendre quand c'est ce cas qui se présente.

D'autres fois, au contraire, la courbe auxiliaire varie d'un point à l'autre de la courbe donnée. Ce cas s'est déjà présenté à nous plusieurs fois. Aux numéros 31 et 36 nous avons fait usage de la projection de la courbe donnée sur le plan normal au point considéré; au numéro 36 nous avons fait usage de la courbe tracée sur le plan osculateur au point considéré par une droite qui se meut en restant tangente à la courbe donnée; dans la seconde démonstration du théorème qui fait l'objet du numéro 34 nous avons encore construit une courbe auxiliaire variable. C'est dans ce second cas qu'il peut, comme nous allons le reconnaître, devenir indispensable d'user de précaution, si l'on ne veut pas s'exposer à être conduit par le raisonnement à des résultats faux.

Lorsque dans une démonstration qui a pour but d'établir une propriété qu'une courbe possède en chacun de ses points on fait usage d'une courbe auxiliaire variable, il arrive souvent qu'on doive considérer un point déterminé de cette courbe, et lui attribuer en ce point la jouissance de propriétés générales antérieurement démontrées. Mais il ne faut pas oublier que certaines de ces propriétés n'existent *qu'en général*, et peuvent cesser d'avoir lieu en certains points isolés. Lors donc que dans une démonstration on attribue à une courbe auxiliaire variable, et en un point déterminé, la jouissance de telle propriété générale

des courbes, il est indispensable de s'être au préalable assuré que ce point n'est pas un de ces points exceptionnels où cette propriété cesse d'avoir lieu. Si cette précaution n'a pas été prise, la démonstration est insuffisante.

Pour montrer par un exemple le danger qu'il y aurait à la négliger, considérons la projection d'une courbe gauche sur le plan normal en un de ses points, que nous appellerons M. Soit MK (fig. 23) l'intersection du plan normal et du plan osculateur en ce point; MK est tangent en M à la projection. Soit m' la projection d'un second point M' de la courbe donnée, et p le pied de la perpendiculaire abaissée de m' sur MK. Considérant MM' comme du premier ordre, la longueur Mm' est du second, puisqu'elle est égale à la distance du point M' à la tangente en M. Si l'on néglige la précaution sur laquelle nous insistons, on déduira immédiatement de là que $m'p$ est du quatrième ordre, comme étant de l'ordre du carré de l'arc Mm'; et comme $m'p$ est égal à la distance de M' au plan osculateur en M, on arriverait à cette conséquence, que la distance d'un point d'une courbe gauche au plan osculateur en un point infiniment voisin est du quatrième ordre, l'arc qui joint ces deux points étant du premier. Or cette conséquence serait fausse, car nous verrons prochainement que la distance en question est du troisième ordre.

Nous avons plusieurs fois déjà, comme il a été rappelé tout à l'heure, fait usage d'une courbe auxiliaire variant d'un point à un autre de la courbe donnée. Mais jamais nous n'avons eu à lui attribuer, en un point déterminé, la jouissance de ces propriétés qui peuvent cesser d'avoir lieu en certains points isolés. Nos démonstrations n'étaient donc nullement invalidées par l'emploi d'une courbe auxiliaire variable Il n'en serait plus de même dans quelques-unes de celles qui vont suivre, et nous aurons à user de la

précaution dont nous avons cherché à faire ressortir l'importance.

39. En vue de cette précaution, nous ferons une remarque avant d'entrer en matière.

Soient M et M' (fig. 13) deux points d'une courbe plane infiniment voisins; nous supposons M fixe et M' mobile. Soient L le point de rencontre des tangentes en ces deux points, et P le pied de la perpendiculaire abaissée de M' sur ML. Nous avons établi plus haut les trois propositions suivantes:

1° L'arc MM' et l'angle $M'LP$ sont du même ordre infinitésimal (4).

2° Les angles LMM' et $LM'M$ sont des infiniments petits égaux, ainsi que les longueurs ML et $M'L$ (16).

3° $M'P$ est égal à la moitié du produit de l'arc MM' par l'angle $M'LP$, à une quantité près infiniment petite par rapport à lui même (17).

Ces trois propositions sont de celles qui peuvent cesser d'avoir lieu en certains points exceptionnels et isolés. Ce que nous voulons faire remarquer, c'est que si le point M n'est pas exceptionnel par rapport à la première, il ne l'est pas non plus par rapport aux deux autres. En d'autres termes, nous voulons montrer que, M étant un point déterminé d'une courbe plane, toutes les fois que l'on pourra prouver que l'arc MM' et l'angle $M'LP$ sont du même ordre infinitésimal, on sera certain que les angles LMM', $LM'M$ sont des infiniment petits égaux, ainsi que les longueurs ML, $M'L$, et que $M'P$ est égal à la moitié du produit de l'arc MM' par l'angle $M'LP$, à une quantité près infiniment petite par rapport à lui même.

L'angle $M'LP$ étant l'angle de contingence, s'il est du même ordre que l'arc MM', le rayon de courbure au point M est fini. Cela résulte de la définition même du rayon de

courbure. Alors, pour se convaincre que les angles LMM' et $LM'M$ sont des infiniment petits égaux, ainsi que les longueurs ML et $M'L$, il suffit de se reporter à la démonstration par laquelle on a prouvé que ces relations ont lieu en général (16), car on reconnaîtra que cette démonstration ne peut se trouver en défaut que si le rayon de courbure est nul ou infini en celle des deux extrémités de l'arc qui est supposée fixe

De ce que ML et $M'L$ sont des infiniment petits égaux, il résulte immédiatement (17) que $M'P$ est égal à la moitié du produit de l'arc par l'angle $M'LP$, à une quantité près infiniment petite par rapport à lui même.

40. *Expression de l'angle que fait avec le plan osculateur en un point M d'une courbe gauche la tangente en un point M' infiniment voisin.*

Cet angle est égal, à une quantité près infiniment petite par rapport à lui même, à la moitié du produit de l'angle des tangentes par l'angle des plans osculateurs en M et en M'; en d'autres termes, *l'angle que font entre eux le plan tangent et le plan osculateur aux deux extrémités d'un arc infiniment petit est égal, en tant qu'infiniment petit, à la moitié du produit de l'angle de contingence par l'angle de torsion.*

Pour le démontrer, considérons la surface conique dont les génératrices sont parallèles aux tangentes de la courbe donnée, et désignons par μ et μ' les génératrices parallèles aux tangentes en M et en M'. Comme l'angle de μ et μ' est égal à l'angle de contingence, que l'angle des plans tangents au cône suivant μ et μ' est égal à l'angle de torsion (32), et que l'angle que fait μ' avec le plan tangent au cône suivant μ est égal à l'angle de la tangente en M' avec le plan osculateur en M, la question est ramenée à montrer que l'angle que fait μ' avec le plan tangent au

cône suivant μ est égal, en tant qu'infiniment petit, à la moitié du produit de l'angle des génératrices μ et μ' par l'angle des plans tangents suivant ces génératrices.

Soit o (fig. 28) le sommet du cône. Sur l'intersection des plans tangents suivant μ et μ' prenons ol égal à l'unité, et par le point l menons un plan perpendiculaire à cette intersection. Soient m et m' les points en lesquels ce plan coupe μ et μ'; ml et $m'l$ sont tangents en m et en m' à la courbe suivant laquelle le cône est coupé par le plan (24). De m' abaissons une perpendiculaire sur ml, et désignons en le pied par p; $m'p$ est perpendiculaire au plan tangent suivant la génératrice μ. Il suit de là que $m'op$ est l'angle de μ' avec le plan tangent suivant μ; et comme $m'lp$ est l'angle des plans tangents suivants μ et μ', tout est ramené à montrer qu'on a, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à l'angle $m'op$:

$$\text{angle } m'op = \frac{1}{2} \text{angle } mom' \times \text{angle } m'lp.$$

L'angle de contingence et l'angle de torsion étant du même ordre infinitésimal, puisqu'ils sont tous deux du même ordre que l'arc MM', les angles mom' et $m'lp$, qui leur sont respectivement égaux, sont du même ordre; et comme l'arc mm' est du même ordre que l'angle mom', l'arc mm' et l'angle $m'lp$ sont aussi du même ordre. Mais cet angle est celui que font les tangentes aux extrémités de l'arc mm'; donc, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à $m'p$, on a (39):

$$m'p = \frac{1}{2} \text{arc } mm' \times \text{angle } m'lp.$$

Maintenant, $m'p$ est perpendiculaire à op, et comme om diffère infiniment peu de l'unité, $m'p$ diffère du sinus de l'angle $m'op$, et par suite aussi de l'angle $m'op$, d'une quantité infiniment petite par rapport à lui même. D'un autre

côté, les longueurs *om*, *om'* différant infiniment peu de l'unité, l'arc *mm'* diffère de l'angle *mom'* d'une quantité infiniment petite par rapport à lui même. Si donc dans l'égalité précédente on remplace *m'p* et *arc mm'* par *angle m'op* et *angle mom'*, les deux membres continueront à être égaux en tant qu'infiniment petits, car chacun d'eux ne sera altéré que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui même. Ces substitutions donnent:

$$\text{angle } m'op = \frac{1}{2} \text{angle } mom' \times \text{angle } m'lp,$$

et la proposition se trouve démontrée.

41. *L'angle que fait l'intersection des plans osculateurs en deux points M et M' d'une courbe infiniment voisins avec la tangente en l'un de ces points, est égal à la moitié de l'angle de contingence, à une quantité près infiniment petite par rapport à lui même*

Reprenons la figure du numéro précédent; il s'agit de faire voir que l'angle *lom* est, en tant qu'infiniment petit, égal à la moitié de l'angle *mom'*.

Puisque l'arc *mm'* et l'angle des tangentes en ses extrémités sont, ainsi qu'on l'a vu au numéro précédent, du même ordre infinitésimal, *lm* et *lm'* sont des infiniment petits égaux (39); et comme *lm* + *lm'* et *arc mm'* sont aussi des infiniment petits égaux, on a:

$$\lim \frac{lm}{\frac{1}{2} \text{arc } mm'} = 1.$$

D'un autre côté, *ol*, *om* et *om'* ayant tous pour limite l'unité, on a:

$$\lim \frac{\text{angle } lom}{lm} = 1, \quad \lim \frac{\text{angle } mom'}{\text{arc } mm'} = 1.$$

On n'altèrera donc pas la limite du rapport $\dfrac{lm}{\frac{1}{2} \text{arc } mm'}$

si l'on remplace *lm* et *arc mm'* respectivement par *angle lom* et *angle mom'*; on obtient par là :

$$\lim \frac{\text{angle } lom}{\frac{1}{2}\ \text{angle } mom'} = 1,$$

et la proposition est démontrée.

42. *Lemme.* Concevons qu'on ait projeté une courbe gauche sur le plan osculateur en l'un de ses points, que nous désignerons par M. Soit M' un point de la courbe infiniment voisin de M, et m' sa projection sur le plan osculateur en M. *L'angle des tangentes en M et en M' à la courbe donnée, et celui des tangentes en M et en m' à sa projection, sont des infiniment petits égaux.*

Cette proposition, qui nous sera fréquemment utile, s'établit facilement comme suit.

Par un point quelconque O de l'espace (fig. 29), menons les droites OT, OT' et Ot' respectivement parallèles aux tangentes en M, M' et m'. Il faut montrer que les angles TOT', TOt' sont des infiniment petits égaux.

Le plan TOt' est parallèle au plan osculateur en M, et comme le plan TOT' est déterminé par des parallèles aux tangentes en M et en M', il est, à la limite parallèle à ce même plan osculateur (31), de sorte que l'angle des plans TOT', TOt' est infiniment petit. De plus, la tangente en m' à la projection de la courbe donnée étant la projection de la tangente en M' à celle-ci, la droite Ot' est la projection de la droite OT' sur le plan TOt'.

Maintenant, d'un point quelconque a pris sur OT', abaissons des perpendiculaires sur le plan TOt' et sur la droite OT; désignons en les pieds par b et c, et joignons bc. L'angle c du triangle abc n'étant autre que l'angle des plans TOT', TOt', il résulte de ce qui précède qu'il est infiniment petit, et, par suite, que le côté ab est infiniment petit par

rapport aux côtés ac et bc. Comme le point b est situé sur la droite Ot', on déduit immédiatement de là que l'angle $T'Ot'$ est infiniment petit par rapport aux angles TOT', TOt'. Or dans tout angle trièdre, une face quelconque est plus grande que la différence des deux autres ; on a donc :

$$TOT' - TOt' < T'Ot',$$

d'où il résulte que la différence des angles TOT', TOt' est infiniment petite par rapport à chacun d'eux, ou, en d'autres termes, que ces angles sont des infiniment petits égaux, ce qu'on voulait démontrer.

On avait, il est vrai, fait voir au numéro 40 que l'angle $T'Ot'$ est du second ordre, l'angle TOT' étant considéré comme du premier. Si nous n'avons pas utilisé cette proposition, ce qui eût abrégé la démonstration, c'est que celle que nous venons d'établir n'est sujette à aucune ex ception, et qu'il était par conséquent préférable de ne pa s'appuyer sur une proposition qui peut cesser d'avoir lie en certains points isolés, comme c'est le cas de celle d numéro 40.

43. Nous nous proposons maintenant de rechercher l'e pression de la distance d'un point d'une courbe gauche plan osculateur en un point infiniment voisin, et celle la plus courte distance des tangentes en deux points i niment voisins. Soient M et M' (fig. 30) ces deux poi concevons qu'on ait mené les tangentes et les plans o lateurs en M et en M', et soient N, N' les points où l'i section de ces plans est coupée par les tangentes. devons d'abord établir que les trois longueurs MN, $M'N'$ sont, en tant qu'infiniment petites, égales chacu tiers de l'arc MM'. Cela fait, la recherche que nous en vue s'accomplira avec la plus grande facilité.

A cet effet nous montrerons : 1° que la somme

$$MN + NN' + M'N'$$

est, en tant qu'infiniment petite, égale à l'arc MM' ; 2° que les termes dont elle se compose sont des infiniment petits égaux. Alors notre proposition se trouvera démontrée, car il résultera immédiatement de là que chacun de ces termes est, en tant qu'infiniment petit, égal au tiers de l'arc MM'.

Au sujet de la seconde partie de la démonstration, nous pouvons dès à présent faire une remarque qui la simplifiera. Comme $M'N'$ est, par rapport au point M', ce qu'est MN par rapport au point M, si MN et NN' sont des infiniment petits égaux, il en est de même de $M'N'$ et NN', et par suite les longueurs MN, NN' et $M'N'$ sont trois infiniment petits égaux. Il suffira donc de faire voir que MN et et NN' sont des infiniment petits égaux.

1° Soit MT la tangente au point M. Projetons la courbe sur le plan osculateur en M, et soit m' la projection de M'. Menons la tangente en m' à la projection ; cette tangente passe par N', puisqu'elle est la projection de la tangente en M' à la courbe considérée. Soit q le point où elle rencontre MT.

L'angle $M'N'm'$ étant infiniment petit, $M'N'$ et sa projection $m'N'$ sont des infiniment petits égaux. Il suit de là que les sommes

$$MN + NN' + M'N' \quad \text{et} \quad MN + NN' + m'N'$$

sont égales en tant qu'infiniment petites. D'un autre côté, des cordes MM' et Mm', l'une étant la projection de l'autre et leur angle étant infiniment petit, ces cordes, et par suite les arcs MM' et Mm', sont des infiniment petis égaux. Mais la somme

$$MN + NN' + m'N'$$

est, en tant qu'infiniment petite, égale à l'arc Mm', puisqu'elle est comprise entre

$$Mq + m'q \quad \text{et} \quad \text{arc}\, MM',$$

qui sont des infiniment petits égaux. Par conséquent

$$MN + NN' + M'N' \quad \text{et} \quad \text{arc } MM'$$

sont aussi des infiniment petits égaux.

2° Il reste à démontrer que MN et NN' sont des infiniment petits égaux. Considérons à cet effet la courbe tracée sur le plan osculateur en M par une droite qui glisse le long de la courbe donnée en lui restant toujours tangente; d'après ce qu'on a vu dans la première partie du numéro 36, cette courbe est tangente en M à la droite MT, et en N' à la droite NN'. Dès lors, en vertu de la remarque du numéro 39, il sera prouvé que MN et NN' sont des infiniment petits égaux, si l'on démontre que l'arc MN' de cette courbe et l'angle des tangentes en ses extrémités, c'est-à-dire l'angle $N'NT$, sont du même ordre infinitésimal.

Considérons l'arc MM' comme du premier ordre. L'angle $N'NT$ est du premier ordre, car il est, en tant qu'infiniment petit, égal à la moitié de l'angle des tangentes en M et M' (41). Il suffit donc de montrer que l'arc MN' est du premier ordre.

Cet arc étant, d'après la première partie du numéro 36, situé entre la courbe Mm' et la tangente MT, et l'extrémité N' se trouvant sur la droite $m'q$, sa longueur est comprise entre celles de l'arc Mm' et de Mq. Comme l'arc Mm' est du premier ordre, la question est ramenée à démontrer que Mq est du premier ordre.

Le point q étant celui où se coupent les tangentes aux extrémités de l'arc Mm', les longueurs Mq et $m'q$ sont des infiniment petits égaux, et par suite du même ordre que Mm', c'est-à-dire du premier, si l'angle $m'qT$ est du premier ordre (39); or cet angle est du premier ordre, puisqu'en vertu de la proposition du numéro précédent il est égal, en tant qu'infiniment petit, à l'angle des tangentes en M et M' à la courbe donnée.

Il est ainsi démontré que les trois longueurs MN, NN' et $M'N'$ sont, en tant qu'infiniment petites, égales chacune au tiers de l'arc MM'.

Ce résultat est formulé dans les deux énoncés suivants.

La partie de la tangente en un point M d'une courbe gauche, comprise entre ce point et l'intersection des plans osculateurs en M et en un point infiniment voisin M', est, en tant qu'infiniment petite, égale au tiers de l'arc MM'.

La partie de l'intersection des plans osculateurs en deux points M et M' d'une courbe gauche infiniment voisins, comprise entre les points où elle est coupée par les tangentes en M et en M', est, en tant qu'infiniment petite, égale au tiers de l'arc MM'.

44. *Expression de la distance d'un point d'une courbe gauche au plan osculateur en un point infiniment voisin.*

Reprenons la figure du numéro précédent; il s'agit de trouver l'expression de la longueur $M'm'$; on a:

$$M'm' = M'N' \sin M'N'm'.$$

Le second membre ne sera altéré que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui même si l'on en remplace les facteurs par des quantités qui leur soient respectivement égales en tant qu'infiniment petites. Remplaçant $M'N'$ par $\frac{1}{3}\Delta s$ (43), et $\sin M'N'm'$ par angle $M'N'm'$, puis par $\frac{1}{2}\varepsilon\eta$ (40), il vient:

$$M'm' = \frac{1}{6}\varepsilon\eta\Delta s.$$

Ainsi, *la distance d'un point d'une courbe au plan osculateur en un point infiniment voisin est égale, en tant qu'infiniment petite, à la sixième partie du produit de l'arc qui joint les deux points, par l'angle de contingence, par l'angle de torsion.*

45. ***Expression de la plus courte distance des tangentes en deux points d'une courbe gauche infiniment voisins.***

Reprenons encore la figure du numéro 43, et par le point N' menons $N'V$ parallèle à MT. MT est parallèle au plan $M'N'V$, et, par suite, la plus courte distance des tangentes en M et en M' est égale à la distance d'un point quelconque de MT à ce plan. Si donc on désigne par s le pied de la perpendiculaire abaissée de q sur le plan $M'N'V$, qs est égal à cette plus courte distance.

Soit t le point de la tangente en M' dont q est la projection; l'angle en s du triangle qst étant droit, on a :

$$qs = qt \cos sqt.$$

L'angle en q du triangle $N'qt$ est droit aussi ; par suite, on a :

$$qt = N'q \operatorname{tang} qN't,$$

d'où

$$qs = N'q \operatorname{tang} qN't \cos sqt.$$

L'angle sqt est infiniment petit. En effet, il n'est autre que celui des normales au plan osculateur en M et au plan $M'N'V$, ce qui fait qu'il est égal à l'angle de ces plans ; or le plan $M'N'V$ est parallèle à celui mené par la tangente en M parallèlement à celle en M', et ce dernier se confondant à la limite avec le plan osculateur en M, fait avec lui un angle infiniment petit.

Il suit de là que le facteur $\cos sqt$ a pour limite l'unité.

Les angles $qN't$ et $M'N'm'$ sont égaux comme opposés au sommet. Comme d'ailleurs la tangente d'un angle infiniment petit et l'angle lui même sont des infiniment petits égaux, le facteur $\operatorname{tang} qN't$ est égal, en tant qu'infiniment petit, à $\frac{1}{2}\varepsilon\eta$ (40).

$N'q$ est égal à $m'q - m'N'$; or $m'q$ et $m'N'$ sont égaux, en tant qu'infiniment petits, le premier à $\frac{1}{2}\Delta s$, et le second à $\frac{1}{3}\Delta s$ (43); donc $N'q$ est, toujours en tant qu'infiniment petit, égal à $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\Delta s$, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}\Delta s$.

Remplaçant $N'q$, $\tang qN't$ et $\cos sqt$ respectivement par $\frac{1}{6}\Delta s$, $\frac{1}{2}\varepsilon\eta$ et 1, ce qui n'altère le second membre que d'une quantité d'un ordre supérieur à celui de qs, il vient:

$$qs = \frac{1}{12}\varepsilon\eta\Delta s.$$

Ainsi, *la plus courte distance des tangentes en deux points d'une courbe infiniment voisins est égale, en tant qu'infiniment petite, à la douzième partie du produit de l'arc qui joint les deux points, par l'angle de contingence, par l'angle de torsion.*

46. Parmi les diverses grandeurs qui sont introduites par la considération des tangentes et des plans osculateurs aux extrémités d'un arc infiniment petit, les deux dont nous venons de donner les expressions sont les plus importantes à connaître. Les valeurs de celles que nous n'avons pas encore considérées se déduisent facilement, à l'aide de la figure du numéro 43, des résultats obtenus jusqu'ici. Nous allons en formuler quelques unes, laissant au lecteur le soin de faire les vérifications.

L'angle que fait la tangente en M avec la corde MM' est égal à la moitié de l'angle de contingence.

La distance de M' à la tangente en M est égale à la moitié du produit de l'arc par l'angle de contingence.

La distance de M au pied de la commune perpendiculaire aux tangentes en M et en M' est égale à la moitié de l'arc.

L'angle que fait la corde MM' avec le plan osculateur en M est égal au sixième du produit de l'angle de contingence par l'angle de torsion.

La distance de M à l'intersection des plans osculateurs en M et en M' est égale au sixième du produit de l'arc par l'angle de contingence.

L'angle que fait avec le plan osculateur en M le plan mené par la tangente en M parallèlement à celle en M' est égal à la moitié de l'angle de torsion. On s'en assurera en se fondant sur ce que ce plan est parallèle au plan $M'N'V$.

L'angle que fait la commune perpendiculaire aux tangentes en M et en M' avec la normale du plan osculateur en M est égal à la moitié de l'angle de torsion. Il est, en effet, rigoureusement égal au précédent.

L'angle que fait avec le plan osculateur en M le plan mené par la tangente en M et par le point M' est égal au tiers de l'angle de torsion.

47. La définition du cercle de courbure et celle du cercle osculateur sont, pour les courbes gauches, les mêmes que pour les courbes planes. Dans les courbes planes ces deux cercles sont identiques, et il résultera des propositions qui feront l'objet de ce numéro et des deux suivants qu'il en est de même dans les courbes gauches

Le rayon de courbure d'une courbe gauche en un point M est le même que le rayon de courbure en M de la projection de la courbe sur le plan osculateur en ce point.

Soit M' un second point de la courbe donnée infiniment voisin de M, et m' sa projection sur le plan osculateur en M. Δs et ε désignant l'arc MM' et l'angle des tangentes en M et en M' à la courbe donnée, représentons par $\Delta s'$ et

ε' l'arc Mm' et l'angle des tangentes en M et en m' à la projection. Comme les rayons de courbure en M à la courbe considérée et à la projection sont respectivement égaux à

$$lim \frac{\Delta s}{\varepsilon}, \qquad lim \frac{\Delta s'}{\varepsilon'},$$

tout revient à faire voir qu'on a :

$$lim \frac{\Delta s}{\varepsilon} = lim \frac{\Delta s'}{\varepsilon'}.$$

Or cette égalité résulte immédiatement de ce que ε et ε' sont des infiniment petits égaux (42), et de ce que Δs et $\Delta s'$ sont aussi des infiniment petits égaux.

La proposition est ainsi démontrée.

48. *La limite du cercle tangent à une courbe en un point M et passant par un point M' infiniment voisin, est, comme dans les courbes planes, identique au cercle de courbure.*

Soit MT la tangente en M et P le pied de la perpendiculaire abaissée de M' sur MT; désignant par R le rayon du cercle qui est tangent en M à MT et qui passe par M', on tronve par des triangles semblables :

$$2R = \frac{\overline{corde\ MM'}^2}{M'P}.$$

On n'altère pas la limite du second membre si l'on y remplace $corde\ MM'$ par Δs, et $M'P$ par $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta s$; on obtient ainsi :

$$lim\ R = lim \frac{\Delta s}{\varepsilon},$$

ce qui démontre la proposition.

49. *Le cercle osculateur d'une courbe gauche en un point M est le même que le cercle osculateur en M de la projection de la courbe sur le plan osculateur en ce point.*

Soient M', M'' deux points de la courbe considérée infiniment voisins de M, et soient m', m'' leurs projections

sur le plan osculateur en M. Il suffit de démontrer que les deux cercles déterminés, le premier par les points M, M', M'', et le second par les points M, m', m'', ont la même limite.

La démonstration sera fondée sur un théorème connu de géométrie élémentaire, savoir que le rayon du cercle circonscrit à un triangle est égal au quotient qu'on obtient en divisant le produit de ses trois côtés par le quadruple de sa surface.

Désignons par a, b, c les trois côtés du triangle $MM'M''$, par s sa surface, et par R le rayon du cercle qui lui est circonscrit. Désignons par a', b', c', s', R' les grandeurs correspondantes dans le triangle $Mm'm''$. On a, en vertu du théorème qu'on vient de rappeler:

$$R = \frac{abc}{4s} \quad , \quad R' = \frac{a'b'c'}{4s'},$$

et l'on tire de ces égalités:

$$\frac{R}{R'} = \frac{abcs'}{a'b'c's}.$$

Chaque côté du triangle $Mm'm''$ étant la projection de son correspondant dans le triangle $MM'M''$, et faisant d'ailleurs avec lui un angle infiniment petit, on a:

$$\lim \frac{a}{a'} = \lim \frac{b}{b'} = \lim \frac{c}{c'} = 1.$$

D'un autre côté, le plan $MM'M''$ tendant à se confondre avec le plan osculateur, le rapport $\frac{s'}{s}$, qui est égal au cosinus de l'angle de ces plans, tend vers l'unité. Il résulte de là et des dernières égalités qu'on a:

$$\lim \frac{abcs'}{a'b'c's} = 1,$$

et, par conséquent,

$$lim \frac{R}{R'} = 1,$$

ce qui démontre la proposition

50. Nous placerons ici une recherche du résultat de laquelle nous aurons besoin plus tard. Considérons une courbe gauche et sa projection sur le plan osculateur en l'un de ses points, que nous désignerons par M. Soit M' un point de la courbe infiniment voisin de M, et m' sa projection. Nous nous proposons de chercher l'expression de la différence entre les rayons des cercles osculateurs en M' à la courbe donnée et en m' à sa projection.

Soient ϱ et $\varrho + \Delta\varrho$ les rayons des cercles osculateurs à la courbe donnée en M et en M'. Le rayon du cercle osculateur de la projection au point M est ϱ (49), et nous appellerons $\varrho + \omega$ celui au point m'. Il s'agit de trouver l'expression de la différence entre $\varrho + \omega$ et $\varrho + \Delta\varrho$, ou, ce qui est la même chose, celle de la différence $\omega - \Delta\varrho$. A cet effet, nous chercherons d'abord l'expression du rapport $\frac{\varrho + \omega}{\varrho + \Delta\varrho}$, en supposant le point M' fixe.

Soient M'', M''' deux points de la courbe donnée infiniment voisins de M', et soient m'', m''' leurs projections sur le plan osculateur en M; $\varrho + \Delta\varrho$ est la limite du rayon du cercle circonscrit au triangle $M'M''M'''$, et $\varrho + \omega$ est celle du rayon du cercle circonscrit au triangle $m'm''m'''$.

Appelons a, b, c les côtés du triangle $M'M''M'''$, et s sa surface; appelons de même a', b', c', s' les quantités correspondantes du triangle $m'm''m'''$. En vertu du théorème de géométrie rappelé au numéro précédent, les rayons des cercles circonscrits aux triangles $M'M''M'''$, $m'm''m'''$

sont respectivement égaux à $\frac{abc}{4s}$ et à $\frac{a'b'c'}{4s'}$. Il résulte de là qu'on a:

$$\frac{\rho + \omega}{\rho + \Delta\rho} = \lim \frac{a'b'c's}{abcs'}.$$

Les limites des rapports $\frac{a'}{a}$, $\frac{b'}{b}$, $\frac{c'}{c}$ sont toutes trois égales au cosinus de l'angle que font entre elles les tangentes en M' et en m' à la courbe donnée et à la projection, c'est-à-dire au cosinus de l'angle que fait la tangente en M' avec le plan osculateur en M. Désignons cet angle par i. Le rapport $\frac{s}{s'}$ étant égal à la réciproque du cosinus de l'angle des plans des deux triangles, sa limite est la réciproque du cosinus de l'angle des plans osculateurs en M et en M', c'est-à-dire de l'angle η. On a donc:

$$\frac{\rho + \omega}{\rho + \Delta\rho} = \frac{\cos^3 i}{\cos \eta}.$$

Nous cessons maintenant de considérer le point M' comme fixe, et nous le supposons de nouveau infiniment voisin de M. Soit α la différence entre $\frac{\cos^3 i}{\cos \eta}$ et l'unité; on a:

$$\frac{\rho + \omega}{\rho + \Delta\rho} = 1 + \alpha,$$

d'où,

$$\omega - \Delta\rho = \alpha(\rho + \Delta\rho),$$

ou, en négligeant dans l'expression de la différence $\omega - \Delta\rho$ une quantité d'ordre supérieur au sien:

$$\omega - \Delta\rho = \rho\alpha.$$

Tout est donc ramené à trouver l'expression de α; on a:

$$\alpha = \frac{\cos^3 i}{\cos \eta} - 1 = \frac{\cos^3 i - \cos \eta}{\cos \eta}.$$

En remplaçant dans $\frac{\cos^3 i - \cos\eta}{\cos\eta}$ le dénominateur par sa limite, on n'altère cette fraction que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle même. Cette limite étant l'unité, on peut donc prendre pour valeur de α la différence $\cos^3 i - \cos\eta$. On a :

$$\begin{aligned}\cos^3 i - \cos\eta &= 1 - \cos\eta - (1 - \cos^3 i)\\ &= 1 - \cos\eta - (1 + \cos i + \cos^2 i)(1 - \cos i)\\ &= 2\sin^2\frac{1}{2}\eta - 2(1 + \cos i + \cos^2 i)\sin^2\frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

L'angle i étant du second ordre (40) et l'angle η du premier, le second membre de cette dernière différence est infiniment petit par rapport au premier. On ne doit donc conserver que celui-ci. Si l'on y remplace le sinus par l'arc, il vient $\frac{1}{2}\eta^2$. On a donc, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à α:

$$\alpha = \frac{1}{2}\eta^2,$$

et par suite :

$$\omega - \Delta\varrho = \frac{1}{2}\varrho\eta^2.$$

Corollaire. $\Delta\varrho$ est en général du même ordre que l'arc MM', car il représente la variation que subit le rayon de courbure de la courbe donnée quand on passe de M à M', et la longueur de ce rayon est une fonction de celle de la courbe, comptée à partir de l'un quelconque de ses points. On déduit de là, et de l'égalité à laquelle nous venons d'arriver, que $\Delta\varrho$ et ω sont des infiniment petits égaux.

C'est en considérant $\varrho + \Delta\varrho$ et $\varrho + \omega$ comme rayons des cercles osculateurs en M' et en m' que nous avons obtenu la valeur du rapport $\frac{\varrho + \omega}{\varrho + \Delta\varrho}$. On aurait pu l'obtenir

aussi en les considérant comme rayons de courbure. Voici quel eût été alors le raisonnement.

Supposons le point M' fixe; soit M'' un point de la courbe considérée infiniment voisin de M', et m'' sa projection sur le plan osculateur en M. Désignons par E l'angle des tangentes en M' et en M'' à la courbe considérée, et par E' celui des tangentes en m' et en m'' à la projection. On a :

$$\rho + \Delta\rho = lim \frac{arc\ M'M''}{E}, \quad \rho + \omega = lim \frac{arc\ m'm''}{E'},$$

d'où,

$$\frac{\rho + \omega}{\rho + \Delta\rho} = lim \frac{arc\ m'm''}{arc\ M'M''}\ lim \frac{E}{E'}.$$

La limite du rapport des arcs $m'm''$ et $M'M''$ est égale à celle du rapport de leurs cordes. Or cette dernière limite est égale au cosinus de l'angle que fait la tangente en M' avec le plan osculateur en M, c'est-à-dire au cosinus de l'angle que nous avons appelé i. On a donc

$$lim \frac{arc\ m'm''}{arc\ M'M''} = \cos i.$$

Pour trouver la limite du rapport $\frac{E}{E'}$, par un point quelconque O de l'espace (fig. 31) menons OT, OT' respectivement parallèles aux tangentes en M' et en M'' à la courbe considérée, et Ot, Ot' respectivement parallèles aux tangentes en m' et en m'' à la projection. Les angles TOT', tOt' sont égaux, le premier à E, et le second à E'. De plus, le plan tOt' étant parallèle au plan osculateur en M, et le plan TOT' tendant à devenir parallèle à celui en M', la limite de l'angle de ces plans est égale à η. Remarquons encore que Ot et Ot' sont les projections sur le plan tOt' de OT et de OT', et que l'angle TOt n'est autre que l'angle i.

Prenons sur OT et Ot des longueurs OC, Oc égales à l'unité, puis par les points C et c, et dans les plans TOT', tOt', élevons sur OT et Ot des perpendiculaires; elles rencontreront OT' et Ot' en des points que nous appellerons C' et c', et les longueurs CC', cc' sont les tangentes des angles TOT', tOt' Or un angle infiniment petit et sa tangente étant des infiniment petits égaux, on a:

$$\lim \frac{TOT'}{tOt'} = \lim \frac{E}{E'} = \lim \frac{CC'}{cc'},$$

et tout est ramené à trouver la valeur de $\lim \frac{CC'}{cc'}$.

Soit à cet effet OK l'intersection des plans TOT', tOt'. Par un point quelconque A pris sur OK, menons un plan perpendiculaire à cette droite; soient B, D les points en lesquels il coupe OT, OT', et b, d ceux en lesquels il coupe Ot, Ot'. Par B et b, et dans les plans TOT', tOt', élevons des perpendiculaires à OT, Ot, et soient B', b' les points en lesquels elles rencontrent OT', Ot'; on a:

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{OB}, \qquad \frac{cc'}{bb'} = \frac{Oc}{Ob} = \frac{1}{Ob},$$

d'où, en divisant ces égalités membre à membre,

$$\frac{CC'}{cc'} \frac{bb'}{BB'} = \frac{Ob}{OB} = \cos TOt = \cos i,$$

d'où,

$$\frac{CC'}{cc'} = \frac{BB'}{bb'} \cos i,$$

et, par conséquent,

$$\lim \frac{E}{E'} = \cos i \lim \frac{BB'}{bb'}.$$

Maintenant, le triangle $BB'D$ donne

$$\frac{BB'}{BD} = \frac{\sin D}{\sin B'},$$

d'où, puisque l'angle B' est droit à la limite :

$$\lim \frac{BB'}{BD} = \lim \sin D = \lim \cos B = \lim \cos TOK.$$

De même, le triangle $bb'd$ donne

$$\lim \frac{bb'}{bd} = \lim \cos tOK.$$

De ces deux égalités on tire

$$\lim \frac{BB'}{bb'} = \lim \frac{BD}{bd} \lim \frac{\cos TOK}{\cos tOK}.$$

Or, à cause de $\cos TOK = \frac{OA}{OB}$, et de $\cos tOK = \frac{OA}{Ob}$, on a

$$\frac{\cos TOK}{\cos tOK} = \frac{Ob}{OB} = \cos TOt = \cos i,$$

et, par conséquent,

$$\lim \frac{E}{E'} = \cos^2 i \lim \frac{BD}{bd}.$$

Des longueurs BD, bd, la seconde étant la projection de la première, le rapport $\frac{BD}{bd}$ est la réciproque du cosinus de l'angle qu'elles font entre elles ; or comme elles sont situées dans les plans TOT', tot' perpendiculairement à leur intersection, cet angle n'est autre que celui de ces plans. Ce dernier ayant pour limite η, le rapport $\frac{BD}{bd}$ a pour limite $\frac{1}{\cos \eta}$. On a donc

$$\lim \frac{E}{E'} = \frac{\cos^2 i}{\cos \eta},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\rho + \omega}{\rho + \Delta\rho} = \frac{\cos^3 i}{\cos \eta}.$$

51. *Dans les courbes gauches, la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est, comme dans les courbes planes,*

égale à la vingt-quatrième partie du produit de l'arc par le carré de l'angle de contingence, à une quantité près infiniment petite par rapport à elle-même.

Désignons par c la corde de l'arc considéré ; il s'agit de montrer que

$$\Delta s - c \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{24}\,\varepsilon^2 \Delta s$$

sont des infiniment petits égaux.

Soient M, M', les extrémités de l'arc, et m' la projection de M' sur le plan osculateur au point M. Désignant par $\Delta s'$ l'arc Mm', par c' sa corde et par ε' l'angle des tangentes en ses extrémités, nous savons que

$$\Delta s' - c' \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{24}\,\varepsilon'^2 \Delta s'$$

sont des infiniment petits égaux. Nous savons aussi que ε et ε' d'un côté, Δs et $\Delta s'$ de l'autre, sont égaux en tant qu'infiniment petits, et par conséquent que les quantités

$$\frac{1}{24}\,\varepsilon^2 \Delta s \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{24}\,\varepsilon'^2 \Delta s'$$

sont encore des infiniment petits égaux. Dès lors, pour que notre proposition soit démontrée, il suffit de faire voir que les deux différences

$$\Delta s - c \qquad \text{et} \qquad \Delta s' - c'$$

sont égales en tant qu'infiniment petites.

A cet effet nous allons montrer que la différence entre c et c', et celle entre Δs et $\Delta s'$, sont d'un ordre supérieur au troisième. Il résultera immédiatement de là que la différence entre les quantités $\Delta s - c$ et $\Delta s' - c'$ est d'un ordre supérieur au troisième, et comme $\Delta s' - c'$ est du troisième ordre, il sera prouvé que ces quantités sont des infiniment petits égaux.

Le triangle $MM'm'$ donne :

$$c - c' = c\left(1 - \cos M'Mm'\right) = 2\,c \sin^2 \frac{1}{2}\, M'Mm'.$$

Comme ϵ est du premier ordre et l'angle $M'Mm'$ du second (46), on conclut de cette égalité que la différence $\epsilon - \epsilon'$ est du cinquième ordre.

Pour démontrer que la différence $\Delta s - \Delta s'$ est d'un ordre supérieur au troisième, concevons qu'une droite glisse sur la courbe donnée en restant toujours perpendiculaire au plan osculateur en M, et développons le cylindre qu'elle engendre sur le plan tangent suivant la génératrice qui passe par ce même point. Soient MT (fig. 32) la tangente à la courbe considérée au point M, et N, n les positions que viennent occuper les points M', m' par l'effet du développement. L'arc MM' se transforme en un arc MN qui lui est égal en longueur et qui est tangent à MT au point M; le point n est situé sur MT, et l'arc Mm' est égal à Mn. Tout revient donc à faire voir que la différence

$$\text{arc}\, MN - Mn$$

est d'un ordre supérieur au troisième.

Menons la tangente en N à l'arc MN, et soit q le point où elle rencontre MT. Nous allons montrer que

$$Mq + Nq - Mn$$

est d'un ordre supérieur au troisième. Comme l'arc MN est plan, $Mq + Nq$ est plus grand que lui, et par suite il résultera de là que la différence $\text{arc}\, MN - Mn$ est, a fortiori, d'un ordre supérieur au troisième.

On a:

$$Mq + Nq - Mn = Nq - qn,$$

et si de q comme centre avec qN pour rayon on décrit un cercle, et qu'on désigne par D le point où il coupe MT, on a:

$$Nq - qn = nD;$$

tout revient donc à montrer que nD est d'un ordre supérieur au troisième.

Tirons *ND*. L'angle *NnD* étant droit, l'angle *nND* est égal à la moitié de l'angle *NqD*; donc il est infiniment petit, car l'angle *NqD* étant celui des tangentes aux deux extrémités de l'arc *MN*, est infiniment petit. Il suit de là que *nD* est infiniment petit par rapport à *Nn*; mais *Nn* étant égal à la distance de *M'* au plan osculateur en *M*, est du troisième ordre; donc *n'D* est d'un ordre supérieur au troisième.

La proposition est ainsi démontrée.

Pour valeur de $\Delta s - c$ on peut, au lieu de $\frac{1}{24}\varepsilon^2\Delta s$, prendre $\frac{\Delta s^3}{24\rho^2}$, ρ désignant le rayon de première courbure; ces deux expressions sont, en effet, égales en tant qu'infiniment petites, puisqu'on obtient la seconde en mettant la première sous la forme $\frac{\Delta s^3}{24}\frac{\varepsilon^2}{\Delta s^2}$, et remplaçant $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ par sa limite $\frac{1}{\rho}$.

52. Dans les courbes planes nous avons considéré la limite du point de rencontre des normales en deux points infiniment voisins, et nous avons vu qu'elle coïncide avec le centre de courbure. Pour continuer l'étude des propriétés des courbes gauches, nous devons maintenant considérer la limite de l'intersection des plans normaux en deux points infiniment voisins. Cette limite a reçu le nom de *polaire*. La proposition suivante, que nous allons démontrer, comprend comme cas particulier celle que nous venons de rappeler.

La polaire relative à un point donné d'une courbe gauche se confond avec la perpendiculaire élevée sur le plan osculateur en ce point par le centre du cercle osculateur.

Soit M (fig. 33) le point donné, et M' un point de la courbe infiniment voisin. Menons par M un plan perpendiculaire à l'intersection des plans normaux en M et en M', et désignons le par A. Etant perpendiculaire aux deux plans normaux et passant par M, le plan A contient la tangente au point M et la parallèle menée par M à la tangente en M'; il se confond donc à la limite avec le plan osculateur en M. Puis donc que l'intersection des plans normaux est perpendiculaire au plan A, il est déjà prouvé que la polaire est perpendiculaire au plan osculateur. Si donc on désigne par O le point en lequel le plan A coupe l'intersection des plans normaux, il reste seulement, pour que la proposition soit entièrement démontrée, à faire voir que la limite de la longueur MO est égale au rayon du cercle osculateur en M, c'est-à-dire à $lim \frac{\Delta s}{\varepsilon}$.

Soit m' la projection de M' sur le plan A. Tirons $m'O$ et $m'M$. Le triangle OMm' donne :

$$MO = \frac{Mm' \sin Mm'O}{\sin O}.$$

La droite $M'm'$ étant perpendiculaire au plan A, elle est contenue dans le plan normal en M'. Par conséquent, m' est un point de l'intersection de ce plan et du plan A, d'où il résulte que cette intersection n'est autre que la droite $m'O$. L'angle en O du triangle OMm' est donc l'angle des deux plans normaux. Mais ces plans étant perpendiculaires aux tangentes en M et en M', l'angle qu'ils font entre eux est égal à ε. On a donc $angle\, O = \varepsilon$, et, par suite :

$$MO = \frac{Mm' \sin Mm'O}{\sin \varepsilon}.$$

Nous allons maintenant faire voir que l'angle $Mm'O$ est droit à la limite, et que Mm' et Δs sont des infiniment petits égaux. La proposition se trouvera alors démontrée, car il résultera de là qu'on peut, sans altérer la limite de $\frac{Mm' \sin Mm'O}{\sin \varepsilon}$, remplacer Mm' par Δs et $\sin Mm'O$ par l'unité, et par conséquent, puisqu'on peut remplacer $\sin \varepsilon$ par ε, qu'on a :

$$\lim MO = \lim \frac{\Delta s}{\varepsilon}.$$

Le plan A se confondant à la limite avec le plan osculateur en M, l'angle que fait avec lui la corde MM', c'est-à-dire l'angle $M'Mm'$, est infiniment petit. Comme d'ailleurs l'angle $M'm'M$ est droit, les longueurs MM' et Mm' sont des infiniment petits égaux, et par suite Mm' et l'arc MM' ou Δs sont aussi des infiniment petits égaux.

Il reste seulement à faire voir que l'angle $Mm'O$ est droit à la limite; or cela est évident, puisque dans le triangle OMm' l'angle en O est infiniment petit, et que la direction Mm' tendant, comme nous venons de le voir, à se confondre avec celle de la corde MM' et par suite avec celle de la tangente en M, l'angle OMm' est droit à la limite.

La proposition est ainsi démontrée

Concevons que tandis qu'un mobile se transporte le long de la courbe considérée, une droite se meuve de manière à coïncider toujours avec la polaire au point de la courbe où le mobile se trouve au même instant. La surface engendrée par cette droite a reçu le nom de *surface polaire*. Elle est le lieu des polaires de la courbe donnée. La considération de cette surface est fondamentale dans la théorie des développées des courbes gauches.

53. Soient M, M', M'' trois points infiniment voisins pris sur une courbe gauche. Appelons H et H' les plans menés perpendiculairement aux cordes MM', $M'M''$ par leurs milieux. Il est aisé de reconnaître que la limite de leur intersection n'est autre chose que la polaire relative au point M. D'abord le plan $MM'M''$ est perpendiculaire à chacun des plans H et H', et par conséquent aussi à leur intersection, par où l'on voit déjà que la limite de cette intersection est perpendiculaire à la limite du plan $MM'M''$, c'est-à-dire au plan osculateur en M. Ensuite le point où l'intersection perce le plan $MM'M''$ est le centre du cercle qui passe par les points M, M', M'', et comme ce cercle se confond à la limite avec le cercle osculateur au point M, la proposition se trouve entièrement démontrée.

54. Concevons qu'on inscrive un polygone dans une courbe gauche, et que par le milieu de chaque côté on mène un plan auquel ce côté soit perpendiculaire. Soient M, M', M'', etc, les sommets consécutifs du polygone; H, H', H'', etc, les plans menés par les côtés MM', $M'M''$, $M''M'''$, etc.; K, K', K'', etc., les intersections des plans H et H', H' et H'', H'' et H''', etc. Chacune des droites de la série K, K', K'',...... est coupée par celle qui la suit, car deux droites consécutives quelconques de cette série sont situées dans un même plan. Soient L, L', L'', etc., (fig. 34) les intersections des droites K et K', K' et K'', K'' et K''', etc. La longueur LL' fait partie de la droite K', la longueur $L'L''$ fait partie de la droite K'', et ainsi de suite.

Considérons maintenant les espaces plans compris dans l'angle des droites K et K', dans celui des droites K' et K'', dans celui des droites K'' et K''', etc. Ces espaces plans forment par leur réunion une surface polyédrale dont les arêtes sont les droites K, K', K'', etc. Si l'on suppose

que les côtés du polygone inscrit dans la courbe donnée tendent tous vers zéro en même temps que leur nombre augmente indéfiniment, comme, d'après le numéro précédent, chacune des arêtes tendra alors à se confondre avec l'une des polaires de la courbe, la surface polyédrale tendra à se confondre avec la surface polaire.

Les parties des lignes K, K', K'', etc. qui relient les points L, L', L'', etc. constituent une ligne polygonale dont ces points sont les sommets. Elle mérite d'être remarquée. Si l'on se représente la surface polyédrale, on verra qu'elle est formée de deux nappes symétriques qui se rencontrent suivant cette ligne, et que celle-ci constitue comme une arête polygonale à partir de laquelle la surface offre un rebroussement. Comme la surface polyédrale tend à se confondre avec la surface polaire, il résulte de là que celle-ci a aussi une arête de rebroussement à partir de laquelle commencent deux nappes symétriques.

Nous retrouverons plus loin ce même résultat par une voie différente.

55. Par quatre points qui ne sont pas dans un même plan, et parmi lesquels il ne s'en trouve pas trois situés sur une même droite, on peut toujours faire passer une sphère, et l'on n'en peut faire passer qu'une. Le centre de cette sphère est le point d'intersection des trois plans menés perpendiculairement aux droites qui joignent le premier des quatre points au second, le second au troisième et le troisième au quatrième, à égale distance de leurs extrémités. Il suit de là et de la manière dont les points L, L', L'', etc. ont été obtenus au numéro précédent, que chacun d'eux est le centre de la sphère qui passe par quatre consécutifs des sommets du polygone inscrit dans la courbe donnée. Le point L, en particulier, est le centre de la sphère déterminée par les sommets M, M', M'', M'''.

Si l'on suppose le point M fixe et les trois autres s'en rapprochant indéfiniment, cette sphère tend vers une certaine limite qu'on appelle *la sphère osculatrice au point M*. On déduit aisément de ce qui précède que le centre de cette sphère limite est le point commun à la polaire relative au point M et à l'arête de rebroussement de la surface polaire. D'abord il est situé sur l'arête de rebroussement de la surface polaire, puisque, comme on l'a vu au numéro précédent, le polygone $LL'L''$...... tend à se confondre avec cette arête. En second lieu, la sphère déterminée par les points M, M', M'', M''' contenant le cercle qui passe par les points M, M', M'', la sphère osculatrice contient la limite de ce cercle, c'est-à-dire le cercle osculateur au point M, et, par conséquent, son centre est situé sur la perpendiculaire élevée par le centre du cercle osculateur en M au plan de ce cercle, c'est-à-dire sur la polaire relative au point M.

Il résulte de ce qu'on vient de lire que *l'arête de rebroussement de la surface polaire est le lieu des centres des sphères osculatrices de la courbe considérée.*

56. *La limite de la sphère déterminée par le cercle osculateur en M et par un point de la courbe infiniment voisin est identique avec la sphère osculatrice au point M.* En effet, la limite de la sphère déterminée par les points M, M', M'', M''' étant indépendante de la loi suivant laquelle M', M'' et M''' tendent vers M, on peut, à chaque instant du mouvement, supposer les distances MM', MM'' assez petites par rapport à MM''' pour que cette sphère soit altérée aussi peu qu'on voudra, si, sans déplacer le point M''', on remplace le cercle $MM'M''$ par sa limite, c'est-à-dire par le cercle osculateur au point M. De là résulte la proposition.

57. Concevons qu'on mène le plan normal à la courbe donnée en chacun des sommets du polygone inscrit $MM'M''$... envisagé ci-dessus. Des droites qu'on obtient en considérant l'intersection de chacun de ces plans par celui qui vient immédiatement après, deux consécutives sont toujours contenues dans un même plan, et, par conséquent, leur ensemble constitue une certaine surface polyédrale dont elles sont les arêtes. Cette surface a, comme celle considérée plus haut, une arête de rebroussement polygonale dont les sommets sont les points de rencontre des arêtes consécutives.

Supposons que les côtés du polygone $MM'M''$...... tendent tous vers zéro, en même temps que leur nombre croît indéfiniment. Alors, en vertu de la définition de la polaire, chacune des arêtes de la surface polyédrale tendra à se confondre avec une polaire, et, par conséquent, cette surface tendra à se confondre avec la surface polaire. Son arête de rebroussement tendra donc à se confondre avec celle de la surface polaire Or chacun des sommets de cette arête est le point de rencontre des plans menés par trois sommets consécutifs du polygone inscrit dans la courbe donnée. Il résulte de là, et de ce que l'arête de rebroussement de la surface polaire est le lieu des centres des sphères osculatrices (55), que *le centre de la sphère osculatrice en un point M d'une courbe est la limite du point de rencontre des plans normaux en M et en deux points infiniment voisins de M.*

58. La sphère osculatrice étant la limite d'une surface qui passe par quatre points de la courbe infiniment voisins, on peut s'attendre à ce qu'elle ait avec la courbe un contact plus intime que le plan osculateur, qui est la limite d'une surface déterminée par trois points seulement de la

courbe. C'est ce qui a lieu en effet, et nous allons montrer que *la distance de la courbe à la sphère osculatrice est d'un ordre supérieur au troisième.*

Soit M' (fig. 35) un point de la courbe donnée infiniment voisin du point considéré M; m' sa projection sur le plan osculateur en M; C le centre du cercle osculateur en M; I le point où la droite Cm' coupe ce cercle. Les longueurs $M'm'$ et Im' étant du troisième ordre (20, 44 et 49), il en est de même de la longueur $M'I$, car elle est l'hypothénuse du triangle rectangle $M'm'I$, par conséquent plus grande que chacun des deux autres côtés, et d'ailleurs plus petite que leur somme. Nous allons montrer que la distance de M' à la sphère osculatrice en M est infiniment petite par rapport à $M'I$. Il sera établi par là qu'elle est d'un ordre supérieur au troisième.

Soit S le centre de la sphère osculatrice en M, et P le point où elle est percée par la droite SM'. La longueur $M'P$ est la distance de M' à cette sphère. Nous allons faire voir que la limite du rapport $\frac{M'P}{M'I}$ est zéro, ce qui démontrera la proposition.

Le point I étant situé sur le cercle osculateur, et par suite aussi sur la sphère osculatrice, PI est une corde infiniment petite de cette sphère, d'où il résulte que dans le triangle $M'IP$ l'angle P tend à devenir droit. Dès lors, en vertu de l'égalité $\frac{M'P}{M'I} = \frac{\sin I}{\sin P}$, il sera prouvé que le rapport $\frac{M'P}{M'I}$ tend vers zéro, si l'on fait voir que l'angle I est infiniment petit

La sphère osculatrice est la limite de celle qui est déterminée par le point M' et par le cercle osculateur (56),

et le point I appartient à ce cercle. Il suit de là, et de ce que $M'I$ est contenu dans le plan SCM', qui se confond à la limite avec le plan SCM, que la direction de celle des tangentes à la sphère osculatrice qui passe par M et qui est contenue dans ce dernier plan est la limite de la direction $M'I$. Mais cette tangente est aussi la limite de la direction de la corde PI. Dès lors, ces deux directions ont la même limite, et par suite leur angle, c'est-à-dire l'angle $M'IP$, est infiniment petit.

La proposition est ainsi démontrée.

59. *Expression du rayon de la sphère osculatrice.*

Soient M (fig. 36) le point considéré de la courbe donnée, et C le centre du cercle osculateur. La polaire au point M n'est autre que l'axe de ce cercle; désignons la par CX. Le plan MCX est le plan normal à la courbe au point M, et le centre de la sphère osculatrice est situé sur CX. Soit MY la limite de la direction $M'I$ considérée au numéro précédent, c'est-à-dire de celle qui joint un point M' de la courbe infiniment voisin de M au point en lequel le plan déterminée par M' et par la droite CX coupe le cercle osculateur en M. Nous avons vu que cette direction limite est située dans le plan normal en M, et qu'elle est tangente en ce point à la sphère osculatrice. Si donc de M on élève dans le plan normal une perpendiculaire à MY, le point en lequel elle coupe CX est le centre de la sphère osculatrice. Désignons le par S; SM est le rayon de cette sphère, et, par conséquent, la longueur dont nous nous proposons de chercher l'expression.

Appelant ρ_1 le rayon de première courbure, c'est-à-dire la longueur CM, et R le rayon de la sphère osculatrice, le triangle SMC donne :

$$R^2 = \rho_1^2 + \overline{CS}^2$$

Il suffit donc pour connaître R de déterminer CS. On a :

$$CS = \rho_1 \, tang \, SMC = \rho_1 \, cotg \, CMY,$$

ce qui fait que tout est ramené à déterminer la cotangente de l'angle CMY, c'est-à-dire de l'angle que fait la direction MY avec le plan osculateur en M. Or cet angle est la limite de celui que fait avec ce même plan la direction $M'I$, et c'est en nous fondant là dessus que nous allons chercher l'expression de $cotg \, CMY$.

Désignant toujours par m' (fig. 35) la projection de M' sur le plan osculateur en M, la cotangente de l'angle que fait avec ce plan la direction $M'I$ est égale à $\frac{m'I}{M'm'}$. Faisant usage des notations convenues, on a (44), en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur au troisième,

$$M'm' = \frac{1}{6} \varepsilon \eta \Delta s,$$

et, en désignant par ε' l'angle des tangentes en M et en m' à la projection de la courbe sur le plan osculateur en M, et par ω la quantité dont varie le rayon de courbure de cette projection quand on passe du point M au point m', on a (20), au même degré d'approximation,

$$m'I = \frac{1}{6} \varepsilon'^2 \omega.$$

On tire de là :

$$lim \, \frac{m'I}{M'm'} = cotg \, CMY = lim \, \frac{\varepsilon'^2 \omega}{\varepsilon \eta \Delta s}.$$

Les quantités qui figurent au numérateur de cette valeur de $cotg \, CMY$ ne se déduisent de la courbe considérée que par l'intermédiaire de sa projection sur le plan osculateur au point considéré ; mais on peut les remplacer par d'autres qui dérivent directement de la courbe. Nous savons en effet que ε et ε' sont des infiniment petits égaux (42),

et que ω est égal, en tant qu'infiniment petit, à la variation que subit le rayon de première courbure de la courbe considérée quand on passe de M à M' (50, corollaire). Désignant cette variation par $\Delta\rho_1$, puis remplaçant ε' et ω par ε et $\Delta\rho_1$, il vient :

$$cotg\, CMY = lim \frac{\varepsilon \Delta\rho_1}{\eta \Delta s} = \frac{1}{\rho_1}\, lim \frac{\Delta\rho_1}{\eta}.$$

Or nous avons trouvé $CS = \rho_1 cotg\, CMY$, donc :

$$CS = lim \frac{\Delta\rho_1}{\eta}.$$

Multipliant et divisant $\frac{\Delta\rho_1}{\eta}$ par Δs, et désignant par ρ_2 le rayon de seconde courbure, qui est la limite de $\frac{\Delta s}{\eta}$, il vient :

$$CS = \rho_2\, lim \frac{\Delta\rho_1}{\Delta s},$$

ou, en faisant usage de la notation adoptée dans le calcul différentiel :

$$CS = \rho_2 \frac{d\rho_1}{ds}.$$

On a donc, à cause de $R^2 = \rho_1^2 + \overline{CS}^2$:

$$R^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 \left(\frac{d\rho_1}{ds}\right)^2.$$

Nous avons maintenant à nous occuper des développées des courbes gauches, mais à cet effet il est indispensable d'acquérir préalablement quelques notions nouvelles sur les surfaces développables.

On a souvent à considérer une surface comme engendrée par une ligne mobile dont le mouvement est dirigé

par une ou plusieurs lignes fixes. La ligne mobile a reçu le nom de *génératrice*, et les lignes fixes sont appelées *directrices*.

60. *La surface engendrée par une droite qui glisse sur une courbe gauche en lui restant toujours tangente, ou, en d'autres termes, le lieu des tangentes à une courbe gauche, est une surface développable. Cette surface a pour plans tangents les plans osculateurs de la courbe directrice.*

Soit *M* (fig. 37) un point de cette courbe, et *A* un point quelconque de la tangente en *M* Concevons une courbe tracée à volonté sur la surface par le point A. Nous allons montrer que la tangente en *A* à cette courbe est contenue dans le plan osculateur au point *M*. Il sera établi par là que le plan osculateur en un point quelconque de la directrice est tangent à la surface tout le long de la génératrice qui passe par ce point, et la proposition sera démontrée.

Soit *M'* un point de la directrice infiniment voisin de *M*, et *A'* le point en lequel la courbe tracée sur la surface coupe la tangente en *M'*. Considérons l'arc *MM'* comme du premier ordre L'arc *AA'* est aussi du premier ordre, car les longueurs des deux courbes, comptées sur chacune d'elles à partir de l'un quelconque de ses points, sont deux quantités fonctions l'une de l'autre. D'un autre côté, l'angle que fait la tangente en *M'* avec le plan osculateur en *M* étant du second ordre (40), la distance du point *A'* à ce plan est une longueur du second ordre. Il suit de là que la direction *AA'* fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur en *M*, lequel, par conséquent, contient la limite de cette direction, c'est-à-dire la tangente en *A* à la courbe tracée sur la surface. La proposition est ainsi démontrée.

Remarque. La directrice joue, dans la surface lieu des tangentes, le rôle d'arête de rebroussement. Pour s'en convaincre,

il suffit de couper la surface par un plan, car on reconnaîtra alors aisément que la courbe d'intersection rebrousse au point où elle rencontre la directrice. Afin de simplifier la démonstration, nous supposerons le plan sécant normal à la directrice.

Soient (fig. 38):

M le point de la directrice en lequel on mène le plan normal;

MT la tangente au point *M*;

MK l'intersection du plan normal et du plan osculateur en *M*;

M' un point de la directrice infiniment voisin de *M*;

N' le point en lequel la tangente en *M'* à la directrice perce le plan osculateur en *M*;

e celui en lequel elle perce le plan normal;

h le pied de la perpendiculaire abaissée de *e* sur *MK*; nous allons montrer que l'angle *eMh* est infiniment petit.

Considérons l'arc *MM'* comme du premier ordre. Dans le triangle *MM'e*, le côté *MM'* et l'angle en *M'* sont du premier ordre, et comme l'angle en *M* est droit à la limite, *M'e* est, en tant qu'infiniment petit, égal à *MM'*. Par suite, *Me* est du second ordre. D'un autre côté, *M'N'* est égal, en tant qu'infiniment petit, au tiers de *MM'* (43); donc *N'e* est égal aux deux tiers de *MM'*, d'où il suit qu'il est du premier ordre. Mais l'angle que fait *N'e* avec le plan *TMK* est du second ordre (40); donc *eh* est du troisième. Il est par conséquent infiniment petit par rapport à *Me*, d'où il résulte que l'angle *eMh* est infiniment petit. Dès lors, l'arc de courbe que la tangente a la directrice trace sur le plan normal en *M*, quand on la fait glisser de *M'* à *M*, est tangent à *MK* au point *M*.

Maintenant, concevons que la génératrice continue à glisser sur la directrice en s'avançant vers un point M'' situé au delà de M par rapport à M'; elle tracera sur le plan normal en M un nouvel arc tangent en M à MK. Cet arc sera situé, par rapport au précédent, du même côté du plan mené par M perpendiculairement à MK, car pour qu'il n'en fût pas ainsi, il faudrait évidemment que la directrice traversât ce plan, ce qui exigerait qu'elle présentât une inflexion au point M. En outre, ce nouvel arc sera situé, par rapport au premier, de l'autre côté de MK, car il faudrait évidemment, pour qu'il en fût autrement, que le plan osculateur ne traversât pas la directrice au point de contact. Il est ainsi démontré que la courbe tracée sur le plan normal en M par la tangente à la directrice offre un rebroussement au point M.

La proposition énoncée en commençant résulte de là, puisque cette courbe n'est autre que l'intersection de la surface, lieu des tangentes, par le plan normal à la directrice.

Toute surface développable qui n'est ni un cône, ni un cylindre, est le lieu des tangentes à une courbe gauche. Cette proposition, qui est en quelque sorte la réciproque de celle établie tout à l'heure, résultera de celles qui feront l'objet des numéros suivants.

61. *Lemme. L'angle des génératrices qui passent par les deux extrémités d'un arc infiniment petit tracé sur une surface réglée, est, en général, du même ordre que cet arc.*

Concevons que tandis qu'un mobile se transporte le long de la courbe dont fait partie l'arc infiniment petit considéré, une droite, assujettie à passer par un certain point de l'espace, que nous désignerons par O, se meuve de façon à être continuellement parallèle à la génératrice à laquelle appartient le point où le mobile se trouve au même

instant. Cette droite, en vertu de son mouvement, engendre un cône qui est le lieu des parallèles menées par O aux génératrices de la surface donnée.

Soient M, M' les extrémités de l'arc considéré, et m, m' les points correspondants d'une courbe tracée à volonté sur le cône, c'est-à-dire les points de cette courbe situés sur les parallèles aux génératrices qui passent par M et M'. Les arcs MM', mm' sont du même ordre infinitésimal, et il en est de même de l'arc mm' et de l'angle mOm'. Par suite, l'arc MM' et l'angle mOm' sont du même ordre, et comme cet angle est égal à celui que font entre elles les génératrices de la surface considérée qui passent par M et M', la proposition se trouve démontrée.

Ce raisonnement se trouve en défaut si la surface considérée est un cylindre, et il devait en être ainsi, car, dans ce cas, le théorème cesse d'avoir lieu.

62. *Les plans tangents au cône, lieu des parallèles menées par un point de l'espace aux génératrices d'une surface développable, sont parallèles aux plans tangents à cette surface.*

Soient A et A' (fig 39) deux génératrices de la surface considérée infiniment voisines. Traçons sur cette surface deux courbes. Soient M et M' les points en lesquels les deux génératrices sont coupées par la première courbe, N et N' ceux en lesquels elles sont coupées par la seconde, et p, q les pieds des perpendiculaires abaissées de M' et de N' sur le plan tangent à la surface suivant la génératrice A Si nous considérons l'angle des deux génératrices comme du premier ordre, les longueurs MM' et NN' sont aussi du premier ordre (61), et, par suite, les longueurs $M'p$ et $N'q$ sont du second (24. cor. III).

Cela posé, menons par le point M une parallèle à la génératrice A'; sur cette parallèle prenons MN'_1 égal à $M'N'$, et soit q_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de

N'_1 sur le plan tangent suivant la génératrice A. La quantité dont N'_1q_1 diffère de $N'q$ étant égale à $M'p$, et les longueurs $M'p$ et $N'q$ étant du second ordre, N'_1q_1 est du second ordre au plus. Mais NN'_1 est du même ordre que l'angle NMN'_1, donc du premier, et, par conséquent, l'angle que fait NN'_1 avec le plan tangent suivant la génératrice A est infiniment petit. Dès lors, la tangente en N à la courbe que décrit le point N'_1 lorsque la génératrice A' tend à se confondre avec la génératrice A, est contenue dans ce plan.

Il résulte de là que le plan tangent suivant la génératrice A à la surface considérée est tangent aussi au cône qu'on obtient en menant par le point M des parallèles à toutes les génératrices de cette surface.

La proposition est ainsi démontrée.

Nous allons en déduire, comme corollaires, quelques propriétés des surfaces développables.

Corollaire I. L'angle de deux génératrices d'un cône infiniment voisines et celui des plans tangents au cône suivant ces deux génératrices sont du même ordre infinitésimal. Il résulte de là, et de la proposition qu'on vient d'établir, qu'il en est de même dans toute surface développable, pourvu, bien entendu, qu'elle ne soit pas un cylindre.

Corollaire II. L'angle que fait le plan conduit par deux génératrices d'un cône infiniment voisines avec le plan tangent suivant l'une d'elles est égal, en tant qu'infiniment petit, à la moitié de l'angle des plans tangents suivant ces deux génératrices. On le démontre aisément sur la figure du numéro 40. Dès lors, l'angle que fait avec le plan tangent suivant A celui conduit par A' parallèlement à A est égal, en tant qu'infiniment petit, à la moitié de l'angle des plans tangents suivant A et A'. Il est donc du même ordre que l'angle de ces plans, et, par suite, d'après le corol-

laire précédent, du même ordre que l'angle des génératrices A et A'.

Corollaire III. Désignons par α l'angle de deux génératrices d'un cône infiniment voisines, et par β celui des plans tangents au cône suivant ces deux génératrices. D'après ce qu'on a vu au numéro 40, l'angle que fait l'une d'elles avec le plan tangent mené par l'autre est égal, en tant qu'infiniment petit, à $\frac{1}{2}\alpha\beta$. Il suit de là, et de notre théorème, que l'angle que fait A' avec le plan tangent suivant A est égal, en tant qu'infiniment petit, à la moitié du produit de l'angle des plans tangents suivant A et A' par l'angle même de ces droites. Il est donc du second ordre, l'angle des génératrices A et A' étant considéré comme du premier.

Corollaire IV. Soit s le point en lequel la génératrice A' perce le plan tangent suivant la génératrice A. L'angle $M'sp$ étant du second ordre et la longueur $M'p$ aussi, le point s est situé à une distance finie de M', car on a $M's = \frac{M'p}{\sin M'sp}$. Par suite, ce point est nécessairement infiniment voisin de la génératrice A.

63. ***Dans toute surface développable qui n'est pas un cylindre, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est, en général, infiniment petite par rapport à leur angle.***

Reprenons la figure du numéro précédent, et appelons ω l'angle des génératrices A et A'. Par le point s menons une parallèle à A, et appelons K le plan déterminé par cette parallèle et par la droite A'. La plus courte distance des droites A et A' est égale à la distance de la droite A au plan K. Désignons par Θ l'angle que fait le plan K avec le plan tangent suivant A à la surface considérée, et par a la distance du point s à la droite A La distance de cette

droite au plan K est égale à $a \sin \Theta$, et la question est ramenée à prouver que le produit $a \sin \Theta$ est infiniment petit par rapport à ω.

On a vu au numéro précédent, corollaires II et IV, que les angles ω et Θ sont du même ordre infinitésimal, et que la longueur a est infiniment petite. Il suit de là que $a \sin \Theta$ est infiniment petit par rapport à ω, et la proposition se trouve démontrée.

64. *Lorsque, dans une surface réglée, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est infiniment petite par rapport à leur angle, la surface est le lieu des tangentes à une courbe gauche.*

Soient A, A' (fig. 40) deux génératrices de la surface donnée infiniment voisines, et p, p' les points où elles sont rencontrées par leur commune perpendiculaire. Lorsque A' s'approche de A, le point p tend vers une certaine limite. On ne peut admettre en effet qu'il s'éloigne indéfiniment, car concevons qu'on trace une courbe sur la surface, et soient m, m' les points en lesquels elle est coupée par les génératrices A, A'; si les points p et p' s'éloignaient indéfiniment, l'angle de ces génératrices serait infiniment petit par rapport à l'arc mm', et nous avons vu au numéro 61 que cet arc et cet angle sont du même ordre infinitésimal.

La limite vers laquelle tend le point p a reçu le nom de *point central*. Sur chaque génératrice se trouve un point central, et nous allons montrer que les génératrices sont tangentes à la courbe lieu des points centraux

Soient O, O' les points centraux situés sur les génératrices A, A', et t le pied de la perpendiculaire abaissée de O' sur la génératrice A. Nous allons faire voir que $O't$ est infiniment petit par rapport à OO' Il en résultera que la génératrice A est la limite de la direction OO'. Comme OO' est une corde infiniment petite de la courbe lieu des

points centraux, il suivra de là que la génératrice A est tangente en O à cette courbe, et la proposition se trouvera démontrée.

Remarquons d'abord que la longueur pp' est infiniment petite par rapport à l'arc OO' (que l'on n'a pas tracé sur la figure, parce qu'il l'aurait chargée sans utilité); cela résulte de ce que cet arc est du même ordre que l'angle des génératrices A, A' (61), et de ce qu'en vertu de l'hypothèse, pp' est infiniment petit par rapport à cet angle. Remarquons encore que p et p' étant infiniment voisins de O et de O', les longuenrs Op, $O'p'$ sont infiniment petites.

Soit V la projection de O' sur le plan mené par A parallèlement à A'. On a $O'V = pp'$, et $Vp = O'p'$. La longueur $O't$ est plus grande que Vt, car le triangle $O'tV$ est rectangle en V; mais la différence est inférieure à $O'V$ ou pp', d'où il suit que si Vt est infiniment petit par rapport à OO', il en est de même de $O't$. Il suffit donc de démontrer que Vt est infiniment petit par rapport à OO'. Or on a :

$$Vt = Vp \sin Vpt,$$

d'où il résulte, puisque Vp est infiniment petit, que Vt est infiniment petit par rapport à l'angle Vpt; mais cet angle n'est autre que celui des génératrices A et A', et puisque ce dernier est du même ordre que l'arc OO', Vt est infiniment petit par rapport à cet arc.

La proposition est ainsi démontrée.

Il résulte des deux dernières propositions que *toute surface développable qui n'est ni un cône, ni un cylindre, est le lieu des tangentes à une courbe gauche.*

Remarque. Nous savons que la plus courte distance de deux tangentes d'une courbe gauche infiniment voisines est du troisième ordre, leur angle étant considéré comme du premier. De là, et de la proposition qu'on vient de démontrer, résulte le curieux théorème que voici: *Lorsque, dans une*

surface réglée, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est, en général, d'un ordre supérieur à celui de leur angle, elle est de l'ordre du cube de cet angle.

Les notions dont nous avons besoin sur les surfaces développables étant maintenant établies, nous retournons aux courbes gauches. Nous allons nous occuper de la surface polaire, dont la considération est à la base de la théorie des développées.

65. *La surface polaire est développable, et les plans normaux de la courbe considérée sont ses plans tangents*

Coupons la surface polaire par un plan quelconque, et appelons A la courbe d'intersection. Soit N (fig. 41) le point de cette courbe qui correspond à un point M de la courbe donnée, c'est-à-dire le point en lequel le plan sécant est percé par la polaire relative à M. Soit NU l'intersection du plan normal en M par le point sécant. Nous allons faire voir que NU est tangent en N à la courbe A. La proposition sera alors démontrée, car le plan sécant étant arbitraire, et N étant, par conséquent, un point quelconque de la polaire au point M, il sera établi par là que le plan normal en M est tangent à la surface tout le long de cette polaire. Soit N' un point de la courbe A infiniment voisin de N; conformément à la définition de la tangente, il s'agit de montrer que l'angle que fait NU avec la corde NN' est infiniment petit. Soient M' le point de la courbe donnée qui correspond à N', $N'U'$ l'intersection du plan normal en M' par le point sécant, et V le point de rencontre des droites NU et $N'U'$.

Remarquons d'abord que le point V est infiniment voisin de N. En effet, ce point appartient à l'intersection des plans normaux en M et en M', et le point N est situé sur la

polaire relative à M, laquelle n'est autre chose que la limite de cette intersection. Par une raison analogue, V est infiniment voisin de N'. Il suit de là que les longueurs VN, VN' sont infiniment petites.

Remarquons en second lieu que l'arc NN' est du même ordre infinitésimal que l'arc MM'. En effet, l'arc de la courbe donnée et celui de la courbe A, comptés à partir de points fixes pris sur ces courbes, sont deux longueurs fonctions l'une de l'autre.

En troisième lieu, l'angle UVU' est aussi du même ordre que l'arc MM'. Pour le faire voir, nous allons montrer qu'il est du même ordre que l'angle des plans normaux en M et en M', et cela suffira, puisque cet angle est du même ordre que l'arc MM'. A cet effet, considérons le trièdre dont le sommet est V et dont les trois arêtes sont VU, VU', et l'intersection de deux plans normaux, intersection que nous appellerons VX Dans ce trièdre, la face UVU' et le dièdre dont l'arête est VX sont infiniment petits, tandis que les deux autres faces, c'est-à-dire UVX, $U'VX$, et les deux autres dièdres, c'est-à-dire ceux dont les arêtes sont VU, VU', sont des quantités finies. Donc, puisque les sinus des faces sont proportionnels à ceux des dièdres opposés, et que la face UVU' est opposée au dièdre dont l'arête est VX, le rapport de l'angle UVU' à ce dièdre, c'est-à-dire à l'angle des plans normaux, a une limite finie, ce qu'on voulait démontrer.

Ces préliminaires posés, la démonstration s'achève facilement. L'angle UVU' et la longueur NN' étant du même ordre infinitésimal, le rapport $\frac{\sin UVU'}{NN'}$ a une limite finie, et par suite aussi le rapport $\frac{\sin NVN'}{NN'}$, puisque les sinus

des angles UVU', NVN' sont égaux. Or, le triangle NVN' donne :

$$\frac{\sin UNN'}{VN'} = \frac{\sin NVN'}{NN'},$$

d'où il suit que le rapport $\frac{\sin UNN'}{VN'}$ tend vers une limite finie Donc, puisque VN' est infiniment petit, il en est de même de l'angle que fait NU avec la corde NN', et la proposition est démontrée

Plusieurs propriétés des courbes gauches s'en déduisent immédiatement.

Corollaire I. La surface polaire étant développable, elle est le lieu des tangentes à une certaine courbe qui constitue son arête de rebroussement et qui a pour plans osculateurs les plans tangents à la surface polaire, c'est-à-dire les plans normaux à la courbe donnée. Nous savons déjà que l'arête de rebroussement de la surface polaire est le lieu des centres des sphères osculatrices. Par conséquent, *les plans normaux à la courbe donnée sont les plans osculateurs de la courbe lieu des centres des sphères osculatrices, et la surface polaire est le lieu des tangentes à cette même courbe*

Corollaire II. Il suit de là que de ces deux courbes, la proposée et le lieu des centres des sphères osculatrices, les tangentes de l'une sont perpendiculaires aux plans osculateurs de l'autre. Par conséquent, le rapport des angles de contingence et de torsion en un point de l'une de ces deux courbes est égal au rapport inverse au point correspondant de l'autre. On déduit de là que *le rapport des rayons de première et de seconde courbure en un point de la proposée est égal au rapport inverse au point correspondant du lieu des centres des sphères osculatrices.*

Corollaire III. On appelle *normale principale* celle des normales qui est contenue dans le plan osculateur. C'est

donc celle sur laquelle est situé le centre du cercle osculateur Cela posé, de ce que la tangente et le plan osculateur en un point de l'une des deux courbes sont respectivement perpendiculaires au plan osculateur et à la tangente au point correspondant de l'autre, il résulte immédiatement la proposition que voici : *Les normales principales à la proposée et au lieu des centres des sphères osculatrices sont parallèles*

66. *Si l'on fait rouler le plan tangent sur la surface polaire, ce plan, qui dans son mouvement reste toujours normal à la courbe considérée, est toujours traversé par elle au même point.*

Considérons deux points infiniment voisins M et M' de la courbe donnée. Nous ferons voir premièrement que si le plan tangent à la surface polaire, d'abord normal en M, roule jusqu'à devenir normal en M', le point M, considéré comme appartenant au plan normal et comme entraîné dans son mouvement, se trouve alors à une distance de M' infiniment petite par rapport à l'arc MM'. Nous regarderons cet arc comme du premier ordre.

Appelons A et A' (fig. 42) les plans normaux en M et en M', C leur intersection, et B, B' les droites suivant lesquelles ces plans touchent la surface polaire, c'est-à-dire les polaires relatives aux points M et M'. Traçons dans le plan A deux droites quelconques, et soient p, q les points en lesquels elles coupent la polaire B. Le plan A roulant sur la surface polaire, ces droites s'enrouleront sur cette surface suivant des courbes dont nous désignerons par p' et q' les points situés sur la polaire B'. Soient p'' et q'' les points des deux droites qui viennent s'appliquer sur p' et q'. Les arcs pp', qq' sont du même ordre que MM', donc du premier, et respectivement égaux en longueur à pp'', qq''. De là, et de ce que les droites tracées dans le plan

A sont tangentes en p et en q aux courbes suivant lesquelles elles s'enroulent, il résulte que les distances $p'p''$, $q'q''$ sont du second ordre.

Cela posé, nous allons faire exécuter au plan A trois mouvements consécutifs dont l'ensemble équivaudra au roulement de ce plan sur la surface polaire. Nous voulons dire par là que, ces trois mouvements accomplis, chaque point du plan A occupera dans l'espace exactement la même position que si ce plan était venu coïncider avec le plan A' en roulant sur la surface polaire. Le premier de ces mouvements sera un mouvement de rotation autour de la droite C, intersection des plans A et A', qui amènera le premier de ces plans à coïncider avec le second Le deuxième sera un mouvement de translation qui amènera le point p'', situé après le premier mouvement dans le plan A', à coïncider avec p', et en vertu duquel tous les points du plan A décriront des droites parallèles et égales à $p''p'$. Le troisième et dernier sera un mouvement de rotation autour d'un axe mené par p' perpendiculairement au plan A', mouvement qui amènera q'' à coïncider avec q', et en vertu duquel tous les points du plan A décriront des arcs de cercle ayant p' pour centre. Il est évident que l'ensemble de ces trois mouvements équivaut au roulement sur la surface polaire qui amènerait le plan A à coïncider avec le plan A'.

Examinons l'effet de chacun d'eux sur le point M considéré comme appartenant au plan A et entraîné avec lui

Le plan A étant normal à la courbe considérée, le premier mouvement fait décrire au point M un arc de cercle tangent à cette courbe au point de départ, d'où il suit que le point M vient occuper une position qui est distante de M' d'une longueur infiniment petite du second ordre.

Avant de rechercher l'influence qu'a sur la position du point M le second mouvement, qui est destiné à amener le point p'' en p', il faut examiner celle que le premier mouvement a eue sur la position de ce point p''.

Appelant r le pied de la perpendiculaire abaissée de p'' sur l'intersection C, le déplacement de p'' qui résulte de ce premier mouvement est la corde d'un arc de cercle qui a pour rayon rp'', et pour angle au centre l'angle des plans A, A'. Cet angle est du premier ordre, et rp'' est du même ordre que pp', c'est-à-dire du premier. Le déplacement en question est donc du second ordre. Donc la distance $p''p'$, qui était du second ordre avant le premier mouvement, est du second ordre ou d'un ordre supérieur, une fois ce mouvement exécuté. Par une raison analogue, il en est de même de la distance $q''q'$.

Maintenant, le deuxième mouvement ayant pour effet de déplacer tous les points du plan A d'une longueur égale à $p''p'$, le point M se trouvera encore, après ce mouvement, à une distance de M' infiniment petite par rapport à l'arc MM'.

Le point q'' s'étant aussi déplacé d'une longueur égale à $p''p'$, la distance $q''q'$ est, après le deuxième mouvement, du second ordre ou d'un ordre supérieur.

Le troisième mouvement est un mouvement de rotation autour de p' qui a pour but de faire coïncider q'' avec q'. L'angle dont le plan A doit tourner à cet effet est du même ordre que la distance $q''q'$; donc la quantité dont se déplace le point M en vertu du troisième mouvement est du même ordre que $q''q'$, et, par conséquent, infiniment petite par rapport à l'arc MM'.

Il suit de là que, le troisième mouvement accompli, la distance à laquelle le point M se trouve de M' est infini-

ment petite par rapport à l'arc MM'; et comme les trois mouvements sont équivalents par leur ensemble au roulement sur la surface polaire qui amènerait le plan A à coïncider avec le plan A', la proposition préliminaire que nous avions en vue se trouve démontrée.

Ce point acquis, la démonstration s'achève facilement. Considérons un arc fini commençant au point M, et décomposons le en n parties terminées en des points que nous appellerons M', M'', M''',......, $M^{(n)}$, ce dernier étant la seconde extrémité de l'arc fini que l'on considère. Nous supposerons ces parties infiniment petites et croissant en nombre indéfiniment. Concevons maintenant que le plan normal roule sur la surface polaire à partir de la position où il coupe la courbe donnée au point M jusqu'à celle où il la coupe au point $M^{(n)}$, et qu'il emporte successivement les points M, M', M'',......, $M^{(n-1)}$. Quand il sera arrivé en M', le point M se trouvera à une distance de M' infiniment petite par rapport à l'arc MM'; quand il sera arrivé en M'', le point M' se trouvera a une distance de M'' infiniment petite par rapport à l'arc $M'M''$;......; quand il sera arrivé en $M^{(n)}$, le point $M^{(n-1)}$ se trouvera à une distance de $M^{(n)}$ infiniment petite par rapport à l'arc $M^{(n-1)}M^{(n)}$. Or la distance à laquelle M sera de $M^{(n)}$, lorsque le plan normal coupera la courbe en ce dernier point, est inférieure à la somme de toutes ces distances infiniment petites par rapport aux arcs qui leur correspondent sur la courbe donnée; donc cette distance est infiniment petite par rapport à la somme de ces arcs, c'est-à-dire par rapport à l'arc fini considéré $MM^{(n)}$, donc elle est nulle.

Il est ainsi démontré que si l'on fait rouler le plan normal sur la surface polaire, il est toujours rencontré par la courbe au même point.

La génération des développées et leurs principales propriétés se déduisent de ce théorème comme simples conséquences

67. Concevons qu'on ait tracé dans le plan tangent à la surface polaire une droite indéfinie qui rencontre la courbe donnée, et qu'on fasse ensuite rouler le plan sur la surface. En vertu du théorème qu'on vient de démontrer, la droite ne cesse pas de rencontrer la courbe, et est toujours coupée par elle au même point. Considérons maintenant la courbe suivant laquelle cette droite s'enroule sur la surface. A chaque instant du mouvement, la partie non enroulée se raccorde avec celle qui l'est déjà, en sorte qu'au point de séparation celle-ci a pour tangente la première. Si donc on suppose un fil enroulé sur cette courbe jusqu'à un certain point quelconque à partir duquel il s'en détache tangentiellement, la partie rectiligne du fil ira rencontrer la courbe primitive; et si l'on coupe le fil au point de rencontre, de sorte que ce point en devienne une extrémité, puis qu'on développe la partie enroulée du fil en le maintenant toujours tendu et tangent à la partie non encore développée, cette extrémité décrira la courbe primitive.

Cette propriété de la courbe suivant laquelle s'enroule sur la surface polaire une droite tracée dans un plan tangent et rencontrant la courbe primitive, lui a fait donner le nom de *développée*. Par chaque point de la surface polaire il passe une développée, car par tout point de cette surface on peut, dans le plan tangent en ce point, tirer une droite qui rencontre la courbe primitive.

Il est facile de reconnaître qu'il n'existe pas d'auter développées que celles dont nous venons de décrire la génération.

D'abord, toute autre ligne tracée sur la surface polaire étant coupée en chacun de ses points par une de ces der-

nières, elle ne peut être elle-même une développée, car deux courbes qui se coupent n'ont pas la même tangente au point d'intersection.

En second lieu, une développée est nécessairement située sur la surface polaire En effet, toute droite tangente à une développée, étant normale à la courbe primitive, se trouve contenue dans un plan normal à cette courbe, et par suite la développée est, en chacun de ses points, tangente à un plan normal de la courbe primitive. Cela posé, considérons deux points d'une développée infiniment voisins, et les deux plans normaux auxquels elle est tangente en ces points; ces deux points sont infiniment voisins de l'intersection des deux plans, car, pour qu'il en fût autrement, il faudrait que l'arc qui les joint fût contenu dans l'un des deux angles infiniment petits que les deux plans font entre eux, et alors la développée traverserait ces plans au lieu de les toucher. Mais cette intersection est infiniment voisine de la surface polaire; donc les deux points ne peuvent être situés que sur cette surface.

68. *Le plus court chemin entre deux points d'une développée, en supposant qu'on veuille aller de l'un à l'autre sans quitter la surface polaire, est justement l'arc de développée qui les joint.* Cela résulte: 1° de ce qu'en vertu même de leur génération, les développées se transforment en lignes droites lorsqu'on développe la surface polaire sur un plan; 2° de ce qu'une ligne tracée sur une surface développable conserve sa longueur quand on développe la surface sur un plan On appelle *lignes géodésiques* les lignes tracées sur une surface et qui jouissent de la propriété d'être le plus court chemin entre deux quelconques de leurs points. Tels sont sur une sphère les grands cercles. Les développées d'une courbe sont donc des lignes géodésiques de sa surface polaire.

69. ***Lorsqu'on développe la surface polaire sur un plan, les transformées des développées vont toutes concourir en un même point.***

Concevons que le plan tangent roule sur la surface polaire en en entraînant les parties à mesure qu'il les touche; le mouvement une fois terminé, cette surface se trouvera développée sur un plan. Puisque pendant tout le cours du mouvement toutes les développées se rencontrent en un même point, qui est celui où le plan est constamment traversé par la courbe, la même chose a lieu une fois le mouvement terminé, ce qui démontre la proposition.

70. Tout ce que nous avons dit, relativement aux développées, s'applique aux courbes planes aussi bien qu'aux courbes gauches. Seulement, dans le cas d'une courbe plane, la surface polaire est un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de la courbe, et qui a pour section droite le lieu des centres de courbure, cette courbe qu'en traitant des courbes planes nous avons appelée *la développée*.

Dans les courbes gauches, le lieu des centres de courbure n'est pas, comme dans les courbes planes, une développée de la courbe primitive. Soient en effet M, M' (fig. 43) deux points infiniment voisins pris sur la courbe primitive, et C, C' les centres de courbure relatifs à ces points. Pour que le lieu des centres de courbure fût une développée, il faudrait que la direction CM fût la limite de la direction CC', et puisque CC' est du même ordre que MM', il faudrait que la distance de C' à la droite CM fût du second ordre, MM' étant considéré comme du premier. Or cette distance est plus grande que celle de C' au plan osculateur en M, puisque CM est contenu dans ce plan; par conséquent, il faudrait que la distance de C' au plan

osculateur en M fût d'un ordre superieur au premier. Mais cette distance est du premier ordre, car elle est égale au produit du sinus de l'angle des plans osculateurs en M et en M', ou angle de torsion, lequel est du premier ordre, par la distance de C' à l'intersection de ces plans, laquelle distance est finie, puisque, l'intersection des plans osculateurs tendant à se confondre avec la tangente en M (36), elle a pour limite CM, c'est-à-dire le rayon de première courbure au point M.

71. *La surface polaire ayant été développée sur un plan, la transformée du lieu des centres des cercles osculateurs est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées sur les tangentes de la transformée du lieu des centres des sphères osculatrices depuis un même point du plan, qui est celui où vont concourir les transformées des développées. En outre, les longueurs de ces perpendiculaires sont égales aux rayons de courbure.*

Cette proposition est encore une conséquence immédiate du théorème du numéro 66. Considérons un point quelconque A de la courbe proposée; soit C le centre du cercle osculateur en ce point, et S celui de la sphère osculatrice. Dans le triangle qu'on obtient en joignant les points A, C et S, lequel est situé dans le plan normal au point A, AC est le rayon du cercle osculateur, AS celui de la sphère osculatrice, CS est une génératrice de la surface polaire, et AC est perpendiculaire à CS. Concevons maintenant qu'en chaque point de la courbe donnée on ait construit ce triangle, puis qu'on fasse rouler le plan tangent sur la surface polaire. Ce plan viendra coïncider successivement avec celui de chacun des triangles, et emportera le triangle sans le déformer, de telle façon que, le mouvement terminé, les droites AC seront encore perpendiculaires aux droites CS. Le plan roulant étant, pendant

tout le cours du mouvement, traversé par la courbe au même point, une fois le mouvement achevé, tous les points *A* coïncideront, de sorte que toutes les perpendiculaires *AC* seront issues d'un même point, qui est celui où vont concourir les développées quand on étale la surface sur un plan. L'ensemble des points *C* constitue la transformée du lieu des centres des cercles osculateurs, et les droites *CS*, qui avant le mouvement étaient tangentes au lieu des centres des sphères osculatrices (65, corollaire I), sont, après le mouvement, tangentes à la transformée de cette courbe. La proposition est ainsi démontrée.

72. *Le plan osculateur d'une développée est le plan déterminé par la tangente à la développée au point considéré et par la tangente à la courbe primitive au point correspondant.*

Soit *N* (fig. 44) un point d'une développée, et *M* le point correspondant de la courbe primitive; *MN* est tangent en *N* à la développée. Soit *MT* la tangente en *M* à la courbe primitive. Il s'agit de prouver que le plan *NMT* est le plan osculateur de la développée au point *N*.

Soit *N'* un point de la développée infiniment voisin de *N*, et *M'* le point correspondant de la courbe primitive; *M'N'* est tangent à la développée au point *N'*. Par *N* menons une droite *NH* parallèle à *M'N'*; le plan osculateur de la développée au point *N* est la limite du plan *MNH* (31), et il suffit, par conséquent, de prouver que ce plan fait un angle infiniment petit avec le plan *NMT*. Nous considérerons l'arc *MM'* comme du premier ordre, et alors l'arc *NN'* sera aussi du premier ordre.

La distance du point *M'* à la tangente *MT* et celle du point *N'* à la tangente *MN* sont du second ordre; par suite, les distances de *M'* et de *N'* au plan *NMT* sont d'un ordre supérieur au premier, car elles sont respectivement plus petites que celles de ces points aux droites *MT*, *MN*. Or

la longueur $M'N'$ étant finie, l'un au moins des points M', N' est à une distance finie du point où la droite $M'N'$ rencontre le plan NMT; donc l'angle que fait cette droite avec ce plan est d'un ordre supérieur au premier; donc aussi l'angle que fait la droite NH avec le plan NMT est d'un ordre supérieur au premier. D'un autre côté, l'angle MNH est du premier ordre, puisqu'il n'est autre que celui des tangentes aux extrémités de l'arc NN'. Si donc d'un point quelconque a pris sur NH on abaisse des perpendiculaires sur le plan NMT et sur la droite NM, et qu'on en désigne les pieds par b et c, le rapport $\frac{ab}{ac}$ sera infiniment petit. Mais ce rapport est le sinus de l'angle des plans NMT, MNH. Cet angle est donc infiniment petit, comme on voulait le démontrer.

ERRATA.

Page 4, ligne 2; au lieu de M_1, il faut M'.

» 4, » 6; » » » $ML + ML$, il faut $ML + M'L$.

» 11, » 9; » » » M', il faut Q.

» 24, » 5; » » » $LM'L$, il faut $LM'M$.

» 32, » 9; » » » CP', il faut CP.

» 40, » 13; après infiniment, il faut ajouter petit.

» 45, » 10; au lieu de M_1, il faut M'_1.

» 46, » 30; » » » compté, il faut comptés.

» 49, » 21; » » » à la distance, il faut à celui de la distance.

» 50, » 27; » » » mM', il faut $m'M$.

» 51, » 12; » » » au lieu de parallèles aux points, il faut parallèles aux tangentes en les points.

» 52, » 16; avant N', au lieu d'une virgule, il faut un point.

» 54, » 7; au lieu de $M'MM''$, il faut $MM'M''$.

» 55, avant-dernière ligne; cette ligne doit être lue comme suit: et l'on a, x tendant vers zéro,

» 60, ligne 6; avant du second ordre, il faut ajouter le mot donc.

» 60, » 14; au lieu de point osculateur, il faut plan osculateur.

» 64, lignes 19 et suivantes; l'énoncé doit être lu comme suit: *l'angle que fait avec le plan osculateur en une extrémité d'un arc infiniment petit la tangente en l'autre extrémité est égal, en tant qu'infiniment petit, à la moitié du produit de l'angle de contingence par l'angle de torsion.*

» 65, ligne 28; au lieu de om, il faut om'.

» 67, » 20; il faut une virgule après le mot limite.

» 69, dernière ligne; au lieu de *arc* MM', il faut *arc* Mm'.

» 79, ligne 10; au lieu de membre, il faut terme.

» 111, » 29; » » » d'auter, il faut d'autres.

Planche I.

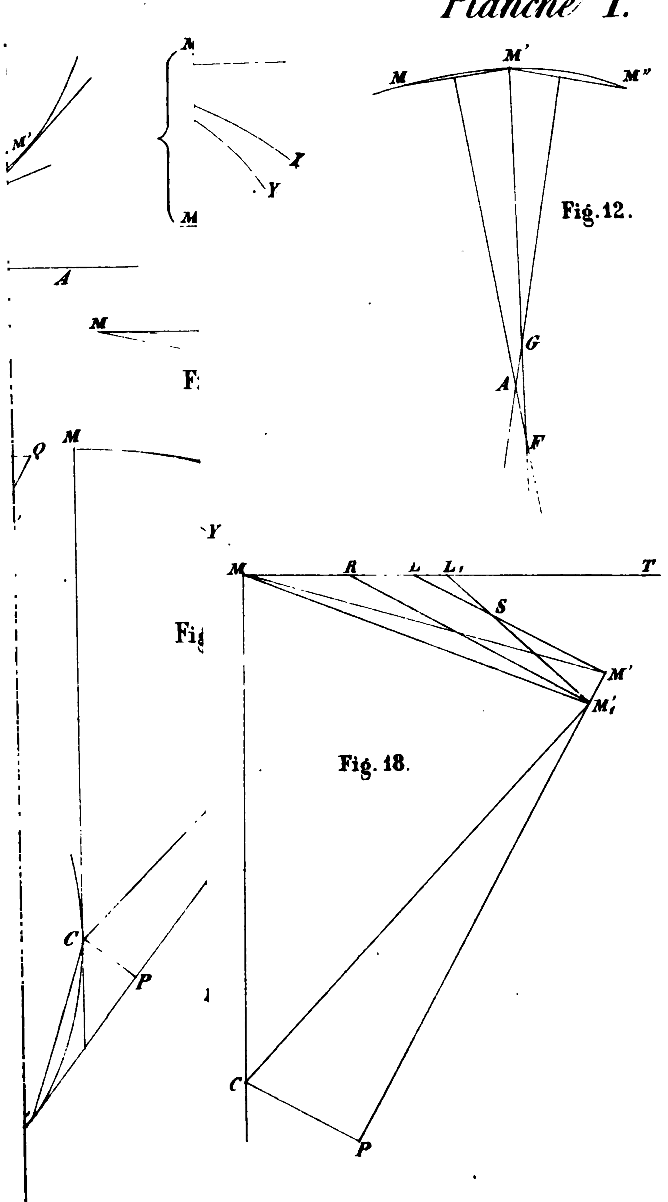


Planche II.

